

دانشکده مهندسی و فناوری دانشگاه مازندران

عنوان درس: مدل سازی جریان و کیفیت آبهای زیرزمینی

Groundwater Flow and Pollution Modeling

مدرس: دکتر محمود محمد رضاپور طبری

دانشیار گروه مهندسی عمران



اهداف و سرفصل درس

هدف این درس آشنایی با نحوه مدلسازی کمی و کیفی آبخوان ها می باشد.

سرفصل درس:

1. معادله جریان آب زیرزمینی و حل تحلیلی آن (قانون دارسی و تعمیم آن، معادله جریان در آبخوان‌های آزاد و تحت فشار، جریان یک بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی، جریان شعاعی، تئوری پتانسیل و جریان‌های ترکیبی، اشاره به اعداد مختلط و نگاشت هم‌مدیس در حل جریان دو بعدی ماندگار)
2. اشاره به حل عددی معادله جریان آب زیرزمینی (انواع روش‌های عددی حل معادله دیفرانسیل جزئی آب زیرزمینی، حل عددی جریان ماندگار در آبخوان‌های تحت فشار و آزاد به روش تفاضل محدود، حل عددی جریان غیرماندگار در آبخوان‌های تحت فشار و آزاد به روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود و کاربرد آن در حل معادلات جریان ماندگار و غیر ماندگار، شیوه منقطع‌سازی مکانی و منقطع‌سازی زمانی، تعیین شرایط اولیه و شرایط مرزی سیستم)
3. مدل‌سازی کامپیوتری جریان آب زیرزمینی (آشنایی با نرم‌افزارهای شناخته شده جریان آب زیرزمینی (از جمله MODFLOW)، اطلاعات مورد نیاز مدل‌سازی و منابع آن‌ها، ساخت مدل، کالیبراسیون مدل و حل معکوس (آشنایی با نرم‌افزارهای PEST و MODOPTIM)، صحت‌سنجی مدل، کاربرد مدل در پیش‌بینی اثرات سناریوهای آبی، کاربرد مدل در بهینه‌سازی بهره‌برداری آب زیرزمینی، نقش مدلسازی کمی در مدل‌سازی کیفی آب زیرزمینی)

اهداف و سرفصل درس

4. شبیه‌سازی جریان و انتقال در ناحیه غیراشباع (مفاهیم اولیه محیط ناحیه غیراشباع، معادله جریان در حالت نیمه‌اشباع، انتقال محلول تحت جریان نیمه‌اشباع، کدهای عمومی مدل‌سازی حالت اشباع متغیر)
5. کیفیت آب زیرزمینی (کیفیت آب زیرزمینی طبیعی، معیارهای کیفیتی آب، نمونه‌برداری کیفی آب زیرزمینی، واکنش‌های شیمیایی، تعادل و واکنش کینتیک، اجزای اولیه (کلسیم، منگنز، سدیم، آهن، کربنات و بیکربنات، سولفات، کلرید، نترات، سیلیکات)، اجزای ثانویه (فسفات، فلوراید، آرسنیک، کروم، مواد آلی)، مواد رادیواکتیو (رادیوم، اورانیوم، رادون)، ایزوتوپ‌های زیست محیطی و تعیین سن آب‌های زیرزمینی، آنالیزهای فیزیکی، شیمیایی، بیولوژیکی و اجزای فیزیکی، شیمیایی، بیولوژیکی، نمایش‌های گرافیکی، گازهای محلول، دما، توزیع و انتقال آن در آب زیرزمینی، منابع شوری و آب‌های زیرزمینی شور)
6. آلودگی آب زیرزمینی (معیارها و استانداردهای کیفی آب (شرب، صنعت، کشاورزی) آلودگی‌های مرتبط با استفاده‌های آب (شرب، صنعت و کشاورزی)، سایر عوامل آلاینده آب زیرزمینی، LNAPLها و DNAPLها، تریقی آلودگی و مکانیسم‌های مرتبط)
7. معادله انتقال و انتشار آلاینده‌ها در آب زیر زمینی (قانون دارسی و انتقال انتشاری (Advective)، انتقال پخشی (Dispersive) و انتقال جرم، انتقال با واکنش‌های شیمیایی، مدل‌های ریاضی و راه‌حل‌های تحلیلی)

اهداف و سرفصل درس

8. اشاره به حل عددی معادله انتقال و انتشار (شبیه‌سازی انتقال **Advective** (روش ردیابی ذرات (**Particle Tracking**))، تبیین ناحیه گیرش (**Capture Zone**))، شبیه‌سازی انتقال **Advective-Dispersive** (روش‌های اویلری، لاگرانژی و ترکیبی)، شبیه‌سازی فرآیندهای غیرتعادلی و انتقال واکنشی (**Reactive**)، شیوه منقطع‌سازی مکانی و منقطع‌سازی زمانی، تعیین شرایط اولیه و شرایط مرزی)
9. مدل‌سازی کامپیوتری انتقال و انتشار آلاینده (مدسازی عددی و کامپیوتری، تعریف اهداف، جمع‌آوری اطلاعات و توسعه مدل مفهومی ورودی‌ها و خروجی‌ها (**Sinks and Sources**))، پارامترهای جریان، پارامترهای انتقال، پارامترهای شیمیایی، کالیبراسیون مدل و تحلیل حساسیت، تحلیل عدم قطعیت، معرفی و کار با نرم‌افزار **(MT3DMS)**
10. شبیه‌سازی جریان و انتقال چگالی وابسته (معادله جریان در شرایط چگالی متغیر، معادله انتقال محلول، مراحل عمومی حل مدل، کدهای عمومی چگالی متغیر، مدل‌سازی نفوذ آب دریا، معرفی و کار با نرم‌افزار **(SEAWAT)**

- محمد رضاپور طبری، محمود، ایل بیگی، مهدی، (۱۳۹۲)، هیدرولوژی آب زیرزمینی (جلد اول)، انتشارات کیان رایانه سبز، ۴۲۴ صفحه.
- محمد رضاپور طبری، محمود، ایل بیگی، مهدی، (۱۳۹۵)، هیدرولوژی آب زیرزمینی (جلد دوم)، انتشارات کیان رایانه سبز، ۵۱۰ صفحه.
- محمد رضاپور طبری، محمود، محمد رضاپور طبری، محسن، ابراهیمی، ابراهیم، (۱۳۹۹)، اصول علم آب زیرزمینی (جلد اول)، انتشارات جهاد دانشگاهی مازندران، ۳۵۵ صفحه.
- Fetter, C.W., (2000), "Applied Hydrogeology", Subsequent Edition, Pearson College Div; Subsequent edition.
- Herbert F. Wang (Author), Mary P. Anderson, (1982), Introduction to Groundwater Modeling: Finite Difference and Finite Element Methods (Series of Books in Geology), W H Freeman & Co; Edition Unstated
- Philip B. Bedient, H. S. Rifai, Charles J. Newell, (1999), Ground Water Contamination: Transport and Remediation, Prentice Hall PTR

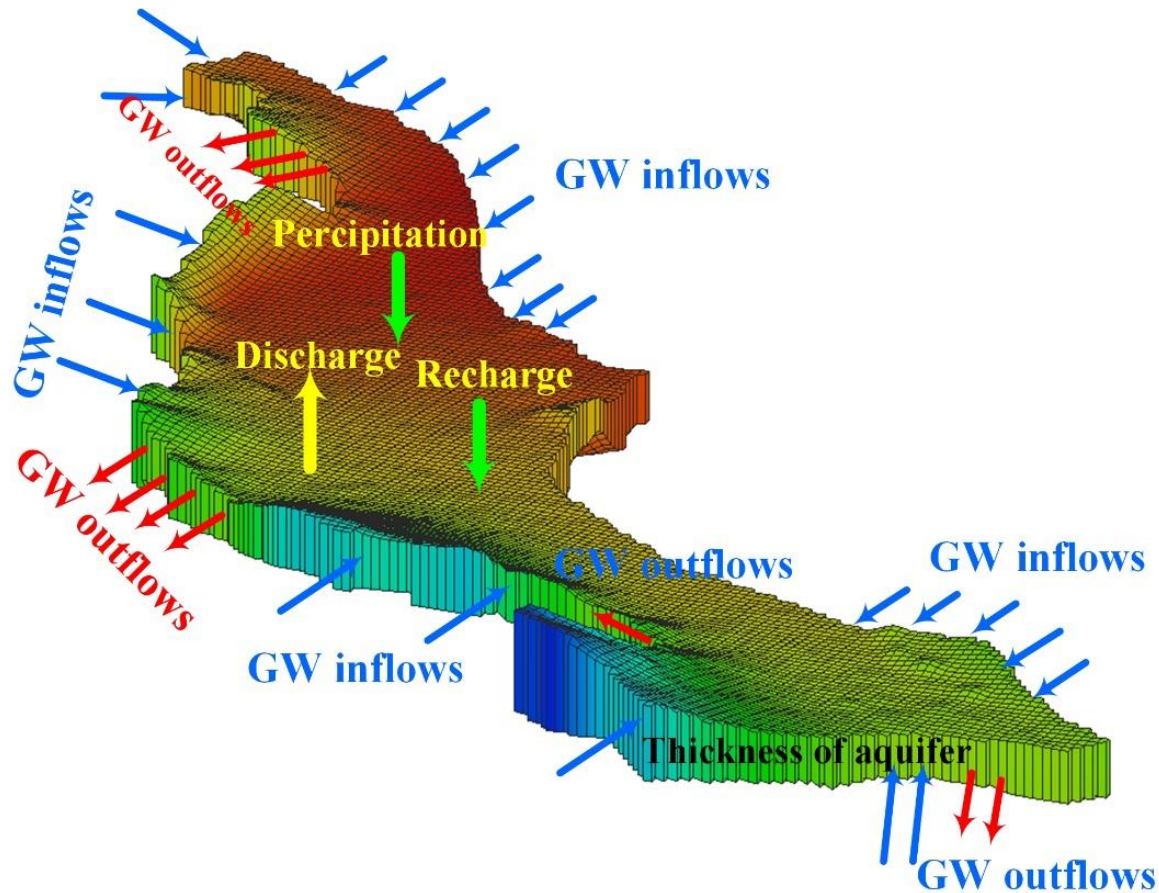
- George F. Pinder, (2002), Groundwater Modeling Using Geographical Information Systems, Wiley, 247 pages.
- Neven Kresic, (2023), Hydrogeology 101: Introduction to Groundwater Science and Engineering, Blue Ridge Press
- Robert E. Mace, (2023), Groundwater Sustainability: Conception, Development, and Application, Palgrave Macmillan
- Delleur D., (1999), The handbook of groundwater engineering, CRC Press LLC, 977 pages.

نحوه ارزیابی:

- ۳۰٪ مرتبط با حل مسائل و تمرینات کلاسی
- ۴۵٪ درصد پروژه
- ۲۵٪ امتحان پایان ترم

Groundwater Modeling

مدلسازی آب های زیرزمینی



واژه آب زیرزمینی در واقع به آب زیرسطحی که در زیرسطح آب در خاک‌های اشباع و سازندهای زمین‌شناسی قرار دارد، اطلاق می‌شود. در مطالعات آب زیرزمینی، شناخت آب سطحی، زیرسطحی، رطوبت خاک در محیط غیراشباع و ارتباطات بین آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد.

با توجه به اینکه آب زیرزمینی سیمای مهمی از محیط‌زیست بوده و بخشی از چرخه هیدرولوژی را تشکیل می‌دهد، لذا در صورتی که تحلیل‌های یکپارچه جهت مدیریت منابع آب حوضه آبریز و یا ارزیابی منطقه‌ای آلودگی مدنظر باشد، درک نقش آب‌های زیرزمینی در چرخه هیدرولوژی از اهمیت بالایی برخوردار است.

آب زیرزمینی منبعی است که در به طور مستقیم قابل دید نمی‌باشد، لذا مطالعه آبخوان تحت شرایط مرزی طبیعی و مصنوعی که در فرآیند مدلسازی مورد استفاده قرار می‌گیرد، امری ضروری و درخور توجه می‌باشد.

در سال‌های گذشته با افزایش قابلیت‌های نرم‌افزای و سخت‌افزاری، مدل‌های شبیه‌سازی کامپیوتری فراوانی جهت تحلیل حرکت جریان در آبخوان و نحوه انتقال آن بکار گرفته شد.

این مدل‌ها نقش قابل توجه‌ایی در توسعه و مدیریت منابع آب زیرزمینی را ایفا می‌نمایند. مدل‌های ریاضی می‌توانند طبیعت سیستم جریان آب زیرزمینی را با توجه به روابط ریاضی حاکم مورد شناسایی قرار دهند.

افزایش بی‌رویه جمعیت در سال‌های اخیر، محدودیت منابع آب‌های سطحی و بهره‌برداری بیش از اندازه از سفره‌های آب زیرزمینی باعث به بار آمدن خسارات جبران‌ناپذیری به منابع طبیعی کشور در سال‌های گذشته شده است. لذا مدیریت و بهره‌برداری و حفاظت از آب‌های زیرزمینی می‌بایست به عنوان یک اصل و پایه در برنامه‌ریزی‌های کشور قرار گیرد. بدون شک بهترین حالت شناخت رفتارهای یک سیستم سفره آب زیرزمینی، انجام یکسری تحقیقاتی درازمدت برای هر منطقه خاص می‌باشد که با توجه به وضعیت کنونی و سقف محدود بودجه‌های پژوهشی عملاً امکان‌پذیر نیست.

در این میان با ابزاری مانند شبیه‌سازی و یا مدل‌ها می‌توان با دقت قابل قبولی شرایطی مشابه آنچه در طبیعت موجود است، بوجود آورد و به نتایج رضایت‌بخشی دست یافت.

تعریف مدل

مدل به مفهوم نمایش یک **پدیده حقیقی و یا نمایش مادی** یک پدیده است که هدف آن واضح ساختن رفتار پدیده حقیقی تحت شرایط خاص می‌باشد. در مبحث آب‌های زیرزمینی، مدل توسط محققین به صورت‌های مختلف تعریف شده است که تمام تعاریف در مفهوم مشابه می‌باشند.

دومینکو مدل را بیانی از یک واقعیت می‌داند که سعی دارد مفاهیم و رفتار آن را به گونه‌ای شرح دهد که همواره **پیچیدگی کمتری نسبت به سامانه واقعی** داشته باشد.

یک سامانه واقعی مانند یک آبخوان، متشکل از مجموعه‌ای از فرآیندها و پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی است. بیان کمی و کیفی این پدیده‌ها و شناخت رفتار سامانه از طریق معادلات حاکم و مدل‌ها صورت می‌گیرد.

تعریف مدل باید مبتنی بر وضعیت هندسی دقیق سامانه مورد مطالعه (به عنوان مثال لایه آبدار) و اطلاعاتی درباره پارامترهای فیزیکی مرزهای ورودی و خروجی های آن سامانه باشد.

تاریخچه مدل‌های آب زیرزمینی

دوره جدید هیدرولوژی آب‌های زیرزمینی از سال ۱۹۳۵ با معادله تایس (Theis) آغاز شد. در دهه‌های ۴۰ و ۵۰ میلادی ژاکوب (Jacob) و هانتوش (Hantush) روابطی را در زمینه حل مسایل جریان چاه‌ها ارائه نمودند. از همین زمان بود که روش‌های نظری در حل مسائل آب‌های زیرزمینی بسیار معمول گردید و اکثر فرمول‌ها و روش‌های تجربی در قالب معادلات ریاضی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت.

در دهه ۱۹۵۰ میلادی بنت (Bennett) و اسکویتزکی (Skivitzke) در سازمان زمین‌شناسی ایالات متحده (USGS)، یک سامانه آبخوان را با استفاده از شبیه‌سازی الکتریکی، که مجموعه‌ای از مقاومت‌ها و اسیلوسکوپ‌ها بود و بر اساس روش تفاضل محدود عمل می‌کرد، مدل‌سازی الکتریکی نمودند. یکی از مزایای شبیه‌سازی مذکور در آن است که تفکیک زمانی صورت نگرفته و زمان به صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود که این مسأله موجب می‌شد مدل بی‌قید و شرط پایدار باشد.

تاریخچه مدل‌های آب زیرزمینی

وجود ماشین‌های حسابگر سریع و کامپیوترهای دیجیتال در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ میلادی باعث گردید که بسیاری از مسایل پیچیده آب‌های زیرزمینی مدل شود.

در دهه ۱۹۵۰ ریاضی‌دانان و **مهندسين مخازن نفت**، روش‌های حل عددی را برای معادله جریان در صنعت نفت مورد آزمایش قرار دادند و از آن زمان به بعد این روش نیز به مجموعه مدل‌ها پیوست. این در حالی بود که هنوز مدل‌های تشابهی برای حل جریان یک سیال منفرد استفاده می‌شد، ولی نمی‌توانست برای مسائل چند فازي به آسانی استفاده شود. این نارسایی موجب شد که مدل‌های عددی سیر تکاملی خود را تا امروز طی کنند. به طوری که از **دهه ۱۹۷۰ به بعد** استفاده از مدل‌های تشابهی تقریباً کنار گذاشته شد و روش‌های عددی در حل مسایل آب‌شناسی بسیار متداول شد و برنامه‌های زیادی به زبان‌های برنامه‌نویسی مختلف توسط افراد متفاوت نوشته شد.

مدل آب زیرزمینی به عنوان یک ابزار مدیریتی

مدل آب زیرزمینی یکی از ابزارهای مدیریتی است که برای حل موارد پیچیده مرتبط با سامانه‌های آب زیرزمینی به کار می‌رود. این ابزار تنها مؤلفه در مطالعه حوضه نبوده و با مدل‌های اقتصادی، اجتماعی و دیگر ابزارهای مدیریتی در ارتباط می‌باشد. اگر مدل به درستی تهیه شده باشد و در شرایط مناسب به کار گرفته شود، ابزار بسیار قدرتمندی در حل مسأله خواهد بود. برای این منظور **داده‌های دقیق و قابل اعتماد** باید در دسترس بوده و تیم کاری مطالعات مدل نیز باید شامل افراد توانا و آگاه در هیدروژئولوژی و هیدرولوژی محلی باشند.

زمینه‌های مختلف	هدف‌ها	مسائل مورد بررسی
تأسیسات سطحی	❖ ایجاد تأسیسات بر روی شبکه جریان‌های سطحی	❖ تغییرات سطح پیزومتری آبخوان در بالادست و پایین‌دست سدها و محل پروژه‌های تغذیه مصنوعی
	❖ سدهای ذخیره‌ای در داخل و یا خارج از محدوده آبخوان	❖ جریان‌های نفوذی از کانال‌های آبرسانی
	❖ شبکه کانال‌های آبرسانی	❖ تأثیر پوشش نهرها در تغذیه آبخوان و تغییرات سطح پیزومتری
	❖ برداشت آب از رودخانه‌هایی که آبخوان را تغذیه می‌کنند.	❖ تغییرات ناشی از افزایش و یا کاهش تغذیه آبخوان از جریان‌های سطحی و تغذیه مصنوعی
	❖ پوشش نهرها	❖ کنترل تغذیه آبخوان با استفاده از تأسیسات سطحی
	❖ تأسیسات تغذیه مصنوعی	

مدل آب زیرزمینی به عنوان یک ابزار مدیریتی

مسائل مورد بررسی	هدفها	زمینه‌های مختلف
<ul style="list-style-type: none"> ❖ تغییرات سطح پیزومتری ❖ تغییرات آبدهی در مقاطع خروجی زیرزمینی ❖ تغییرات بیلان آبخوان جلوگیری از نفوذ آب با کیفیت پایین 	ایجاد سدهای زیرزمینی	تاسیسات زیرزمینی
<ul style="list-style-type: none"> ❖ تغییرات سطح پیزومتری جریانات زهکشی 	ایجاد مجاری و زهکش‌های زیرزمینی	
<ul style="list-style-type: none"> ❖ مدیریت بهره‌برداری از آبخوان شامل: <ul style="list-style-type: none"> ✓ محل های برداشت ✓ افت سطوح پیزومتری ناشی از عمل برداشت ✓ تأثیر عمل برداشت بر روی آبدهی چشمه، چاه‌های موجود و قنات‌های مجاور ✓ امکان تداخل آب‌های آلوده سطحی به داخل آبخوان و همچنین پیشروی جبهه‌های آب شور در مناطق مورد بهره‌برداری و در نتیجه خطر کاهش کیفیت آب 	برداشت از آبخوان با آبدهی معلوم	آب شهری
<ul style="list-style-type: none"> ❖ میزان جریانات قابل تزریق ❖ پیش‌بینی بالا آمدن سطح آب زیرزمینی و خطرات باتلاقی شدن محدوده‌های شهری ❖ بررسی کیفیت آب زیرزمینی تأثیر نفوذ شیرابه زباله‌ها و تعیین محل مناسب برای دفن زباله‌های شهری 	تغذیه آبخوان از فاضلاب شهری و صنعتی	
<ul style="list-style-type: none"> ❖ برداشت آب آشامیدنی محل مناسب برداشت با حداقل نفوذ آب شور به آبخوان آب شیرین 	بررسی تغییرات سطح تماس آب شور و شیرین	نواحی ساحلی

مدل آب زیرزمینی به عنوان یک ابزار مدیریتی

مسائل مورد بررسی	هدف‌ها	زمینه‌های مختلف
<ul style="list-style-type: none"> ❖ بررسی امکانات توسعه بهره برداری از آبخوان برای تامین نیازهای آبی کشاورزی ❖ میزان آب قابل بهره‌برداری ❖ میزان مناسب برداشت از آبخوان ❖ تغذیه آبخوان از آب آبیاری و بررسی خطرات باتلاقی شدن زمین‌ها بر اثر بالا آمدن تراز سطح آب زیرزمینی ❖ بررسی آب‌های نامناسب برای کشاورزی 	<p>آبیاری کشاورزی</p> <p>محدوده‌های</p>	آب کشاورزی
<ul style="list-style-type: none"> ❖ افت تراز سطح آب آبخوان در نتیجه ایجاد شبکه‌های زهکشی ❖ تعیین آبدهی زهکشی‌ها و مشخصات آن‌ها 	زهکشی اراضی	

مبانی مدل‌سازی آبخوان‌ها

مدل ریاضی آب زیرزمینی شبیه‌سازی یک سامانه هیدروژئولوژیکی است که از قوانین فیزیک و ریاضی کمک می‌گیرد. دو مؤلفه اساسی آن **مدل مفهومی (Conceptual Model)** و **مدل ریاضی (Mathematical Model)** می‌باشند.

- مدل مفهومی در حقیقت **تصویر ساده شده‌ای** از سامانه می‌باشد.

- مدل ریاضی، مجموعه‌ای از فرمول‌های ریاضی است که با توجه به فرضیات خاص، به فرآیندهای فیزیکی فعال در درون سامانه آبخوان می‌پردازد.

بدیهی است که مدل به خودی خود جزئیات واقعی سامانه آب زیرزمینی را شامل نمی‌شود، ولی رفتار یک مدل معتبر، تقریباً نشان‌دهنده رفتار آبخوان می‌باشد. بنابراین مدل آب زیرزمینی ابزاری را در اختیار قرار می‌دهد تا بتوان داده‌های موجود را تبدیل به ویژگی‌های عددی برای سامانه آب زیرزمینی نمود. چنین مدلی تا حد مقبولی نماینده سامانه آب زیرزمینی خواهد بود و این امکان را به کارشناس می‌دهد که بتواند واکنش سامانه در برابر تنش‌های هیدرولوژیکی (hydrological stresses) مثل آبیاری یا پمپاژ را به صورت عددی نشان دهد.

هدف از مدل ریاضی یک سفره آب زیرزمینی

شبیه‌سازی طبیعی آبخوان با استفاده از یکسری روابط ریاضی می‌باشد. در صورتیکه بتوان شبیه‌سازی یک آبخوان را انجام داد و آنرا با شرایط طبیعی تطبیق داد، بسهولت می‌توان با تغییر در محل، مقدار و زمان برداشت به بررسی اثرات بهره‌برداری از سفره پرداخت.

یک مدل آب زیرزمینی در واقع فرم ساده شده‌ای از یک سیستم واقعی آب های زیرزمینی است که بطور تقریبی همبستگی بین عمل و عکس العمل هیدرودینامیکی را در یک سیستم ارائه می‌کند. با توجه به ماهیت سیستم و انتظاری که از مدل وجود دارد، ممکن است که در مدل‌های مختلف، فرضیات و ساده‌نگری‌هایی با نگرش و تفکری متفاوت وجود داشته باشد و بر همین اساس می‌توان ادعا کرد که هیچ مدلی در آب زیرزمینی وجود ندارد که بتواند در همه سیستم‌های طبیعی آب‌های زیرزمینی پاسخگو باشد.

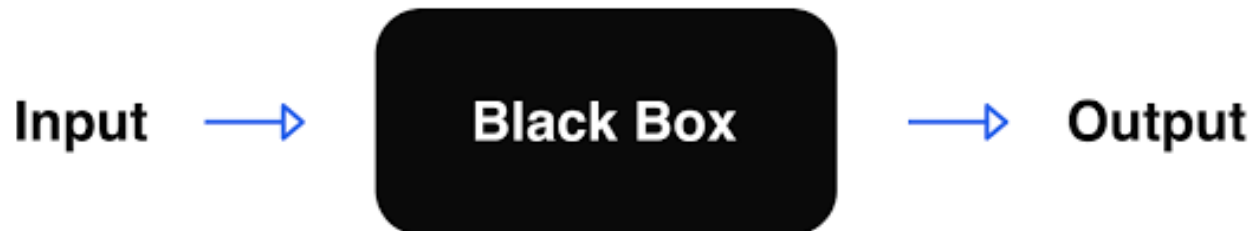
بر اساس نوع فرضیاتی که در این زمینه می‌توان در نظر گرفت، مدل‌های مختلفی وجود دارند:

☐ جعبه سیاه (Black Box)

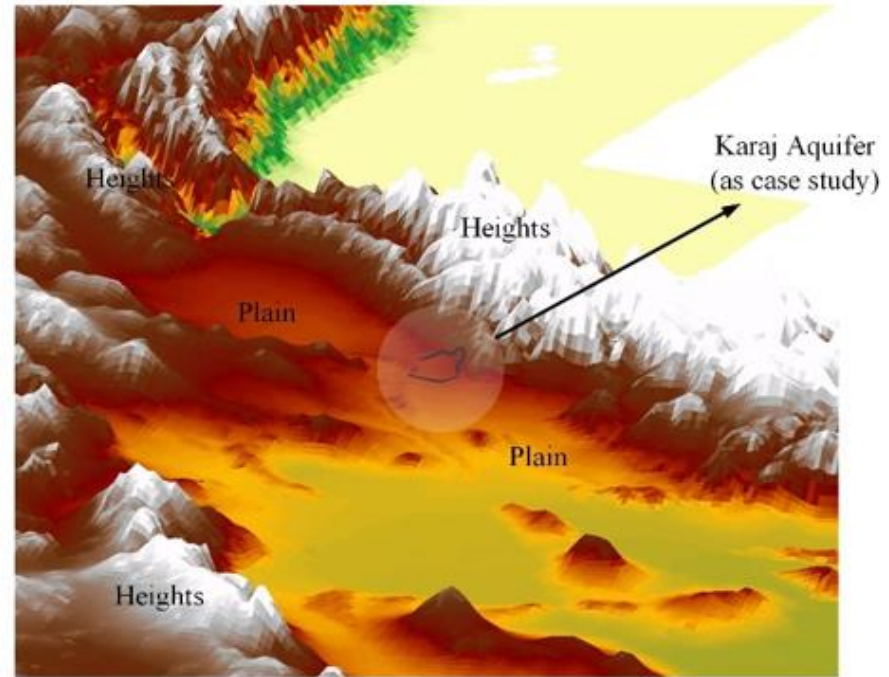
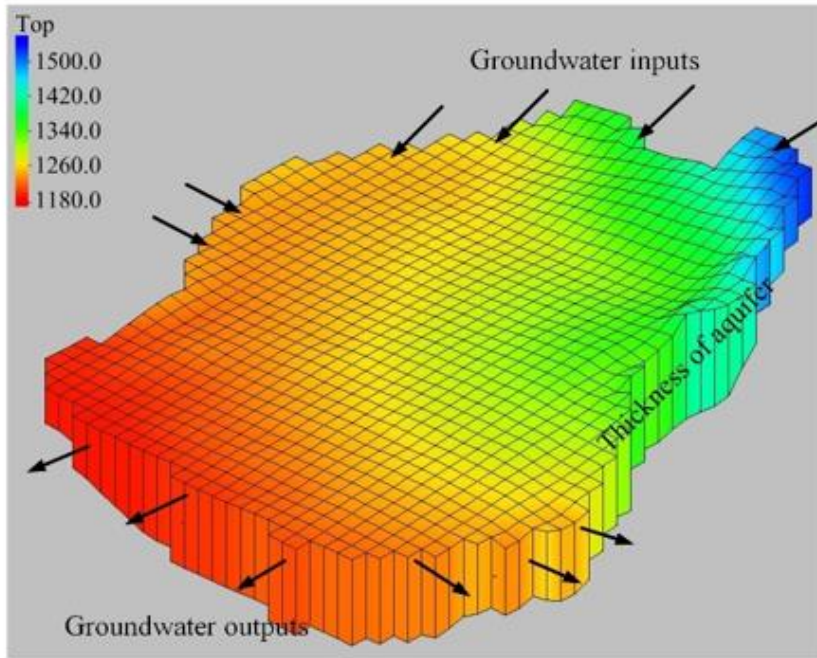
☐ مدل مفهومی (Conceptual Model)

☐ مدل ریاضی (تحلیلی و عددی) نمایشگر سیستم

مدل‌هایی از نوع جعبه سیاه با استفاده از روش‌های تجربی و معمولاً بر پایه همبستگی آماری داده‌های مشاهده‌ای در خروجی و ورودی سیستم بنا نهاده شده‌اند. این نوع مدل‌ها به دلیل صرف نظر کردن از آنچه در درون سیستم طبیعی آبخوان می‌گذرد به خصوص عدم در نظر گرفتن حالت ناپایدار بندرت در آب‌های زیرزمینی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

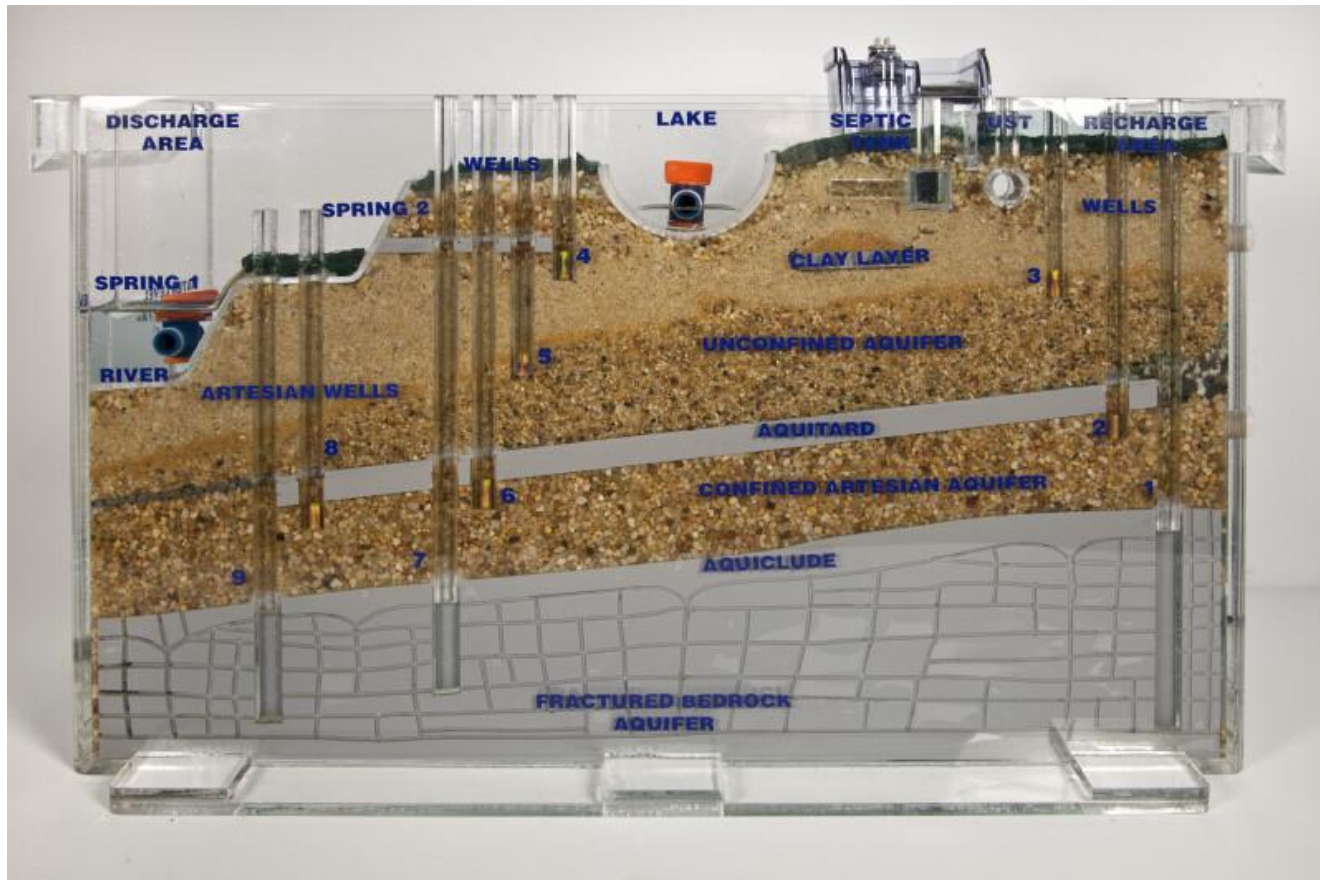


پس از مدل های از نوع جعبه سیاه، می توان مدل های مفهومی را به واقعیت نزدیکتر دانست. این نوع مدل ها با توجه به آنچه در طبیعت آبخوان آب زیرزمینی وجود دارد مانند شرایط زمین شناسی، نوع جریان اعم از ورقه ای و یا متلاطم، مؤلفه های جریان ورودی و خروجی، شرایط مرزی و غیره تهیه می شوند.



گرچه مدل های مفهومی در جهت آگاهی و شناخت اولیه از شرایط حاکم بر محیط آبخوان کمک شایانی می کنند ولی به دلیل توصیفی بودن آنها، نمی توان نتایج آنها به صورت عدد و رقم ارائه کرد و به همین جهت در مدیریت آبخوان مورد استفاده قرار نمی گیرند. ضمن اینکه تهیه این مدل ها در فرآیند مدلسازی ریاضی آبهای زیرزمینی **لازم و ضروری** می باشد.

از طرف دیگر قابل ذکر است که می‌توان با توجه به مدل مفهومی، یک مدل فیزیکی در مقیاس کوچکتر تهیه کرد و با انجام یکسری آزمایش‌ها، تحقیق‌هایی را انجام داد. ولی با وجود مشکلات فراوانی که در این راه وجود دارد، فقط می‌توان مدل فیزیکی را به فرم بسیار ساده شده‌ای از محیط طبیعی در نظر گرفت. ضمن اینکه، انتقال نتایج حاصل از مدل فیزیکی به محیط واقعی، باعث ورود خطا و گاهی خطاهای بزرگ و نهایتاً دستیابی به نتایج غیر معقول می‌شود. علاوه بر این می‌توان **لزوم وقت و هزینه زیاد** جهت تهیه مدل‌های فیزیکی سفره آب زیرزمینی را عامل بازدارنده تهیه این نوع مدل‌ها دانست.



بر این اساس و به علت عدم قابلیت مدل هایی از نوع جعبه سیاه، مفهومی و فیزیکی، اکثر مراکز علمی و پژوهشی دنیا، جهت شناخت بهتر آبخوان و مدیریت آن از **مدل های ریاضی (عددی)** نمایشگر سیستم استفاده می کنند.

رده بندی مدل سازی ریاضی

توصیف	نوع مدل
برای تفسیر سیستم های هیدروژئولوژیکی فرضی بکار می رود و نیاز مبرمی به کالیبراسیون ندارد و می تواند برای کمک به تنظیم قواعد شروع مطالعات بیشتر یک محدوده خاص مفید واقع شود.	کلی (Generic)
برای تهیه شبکه سیستم مطالعات پویا و یا برای ارگانیزه نمودن داده ها استفاده می شود، و نیاز مبرمی به کالیبراسیون ندارد.	تفسیر کننده (Interpretive)
برای پیش بینی آینده به کار می رود و نیاز به کالیبراسیون دارد.	پیش بینی کننده (Predictive)

بر اساس این جدول می توان دریافت که **لازم نیست** حتماً مدل جهت پیش بینی تهیه و بررسی شود. در صورتی که مدل به صورت تفسیر کننده تهیه شده باشد می توان **کاستی های تهیه مدل مفهومی** را شناسایی و اقدام به بررسی مجدد آن نمود. حتی می توان اقدام به مدل سازی به صورت کلی نمود و بدون تحریف، نتایج را با ارائه خطای مدل برای کارفرما مشخص نمود تا کارفرما بیشتر با کاستی های منطقه یا آبخوان آگاه شود و اقدام به بهبود روند جمع آوری اطلاعات نماید.

کلی (Generic)



تفسیر کننده (Interpretive)



پیش‌بینی کننده (Predictive)

سطح مدلسازی از سمت کلی به سمت پیش‌بینی کننده پیشرفته‌تر شده و حجم عملیات نیز افزایش می‌یابد. مدل پیش‌بینی کننده نیاز مبرم به انجام تمامی مراحل الگوریتم مدلسازی را دارد و صحت‌سنجی مدل می‌بایستی به نحو احسن انجام شده باشد.

بنابراین اهداف کلی که از مدلسازی آبخوان‌ها دنبال می‌شود را می‌توان در قالب بندهای زیر ارائه نمود:

❖ ارتقای دانش هیدروژئولوژیک

❖ شبیه‌سازی آبخوان جهت ارزیابی رفتار کمی و کیفی آبخوان‌ها

❖ طراحی راه‌حل‌های کاربردی برای رسیدن به اهداف خاص (مانند میزان برداشت مجاز از آبخوان جهت کنترل

تراز سطح آب زیرزمینی)

❖ مدیریت منابع آب و ارزیابی سیاست‌های موجود بهره‌برداری

❖ پیش‌بینی اثرات گزینه‌های هیدروژئولوژیکی یا طرح‌های توسعه‌های جهت کمک در تصمیم‌گیری‌های

مدیریتی

❖ آنالیزهای حساسیت، عدم دقت و قطعیت جهت راهنمایی در گردآوری داده‌ها و تصمیم‌گیری و خطرپذیری

به طور کلی فعالیت‌های مدل‌سازی آب زیرزمینی را می‌توان به دو دسته زیر تقسیم نمود:

- تفسیر سامانه (Interpretation) آبخوان که به مواردی همچون تعیین مرزهای آبخوان، میزان آب موجود در سامانه، میزان نفوذ، جهت جریان آب زیرزمینی و ... می‌پردازد.
- شبیه‌سازی (Simulation) شرایط فعلی و پیش‌بینی (Prediction) وضعیت آینده آبخوان

شبیه‌سازی سیستم جریان آب زیرزمینی

با توجه به اینکه در **تدوین مدل‌های مدیریت منابع آب** آگاهی از رفتار سفره جهت تعیین میزان برداشت از آبخوان نقش اساسی را ایفا می‌نماید، لذا لازم است وضعیت تراز سطح آب زیرزمینی در اثر تغییرات طبیعی و مصنوعی به گونه‌ای مناسب مورد مدلسازی و شبیه‌سازی قرار گیرد.

با استفاده از مدل‌های شبیه‌سازی آب زیرزمینی می‌توان **خواص مکانی و زمانی سیستم آبخوان** را به صورت فیزیکی و یا ریاضی بیان نمود.

شبیه‌سازی سفره‌های آب زیرزمینی شامل استفاده از روابط و پارامترهای فیزیکی آبخوان است به طوری که به ازای **تغییرات در ورودی و خروجی سیستم**، میزان **تغییرات ذخیره آب زیرزمینی** مشخص شود. در این بخش روابط و معادلات حاکم بر سیستم جریان آب زیرزمینی جهت بررسی رفتار سفره و در نهایت شبیه‌سازی آن ارائه می‌شود.

معادلات جریان آب زیرزمینی

در این بخش معادلاتی که حرکت آب های زیرزمینی را در دو و سه بعد، مشابه آنچه که در طبیعت رخ می دهد، تشریح و پیش بینی می کند، ارائه می شود.

جریان آب زیرزمینی حالتی خاصی از جریان سیال در محیط متخلخل است و توسط قوانین فیزیک، به ویژه قوانین مکانیک سیالات کنترل می شود. مکانیک سیالات به حرکت سیالات و نیروهای وارده بر اجسام جامد در تماس با سیالات می پردازد. اصول اساسی حاکم بر حرکت سیالات، **اصل بقای جرم و قانون دوم نیوتن** است که جهت تشریح جریان آب زیرزمینی مورد استفاده قرار می گیرد.

هدف از ارائه معادلات جریان آب زیرزمینی، استخراج روابط جریان است تا بر اساس آن **متغیرهای حالت** (state variables) آب زیرزمینی در هر نقطه از حوزه جریان و در صورت لزوم در زمان محاسبه شوند.

بنابراین معادلات جریان آب زیرزمینی در قالب معادلات دیفرانسیل جزئی با مختصات مکانی و زمان به عنوان متغیرهای مستقل بیان می شوند. از این رو، متغیرهایی که حالت آب های زیرزمینی را توصیف می کنند، تابعی صریح (explicit functions) از مکان و زمان می باشند (همانند پتانسیل آب زیرزمینی)

$$h(x, y, z, t)$$

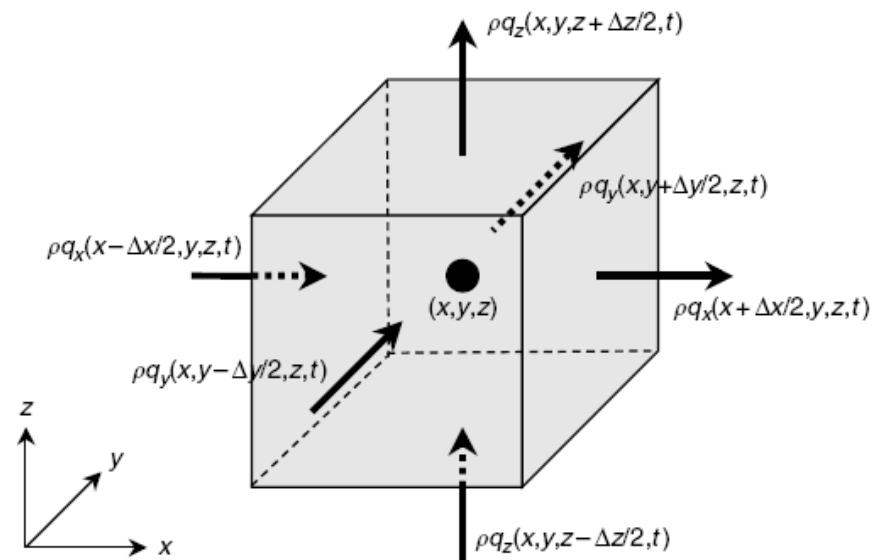
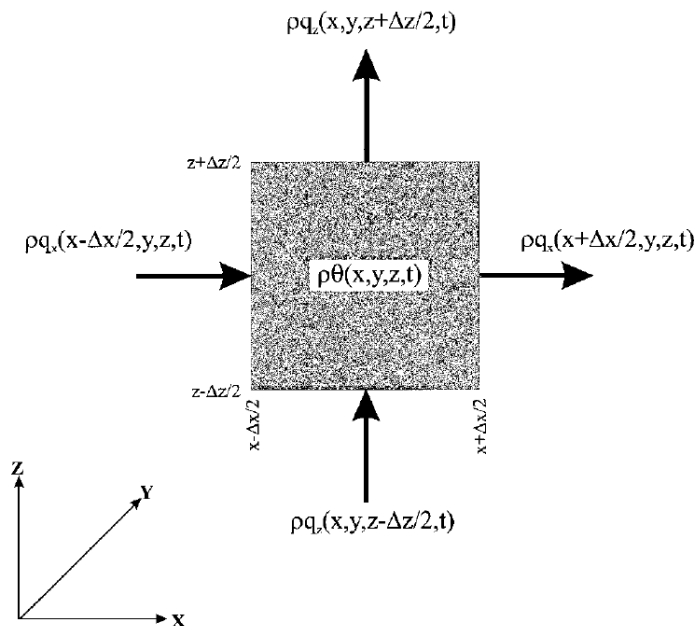
پتانسیل آب زیرزمینی (متغیر وابسته)

متغیرهای مستقل (واحدهای در سیستم SI، متر می باشند. با توجه به کند بودن جریان آب زیرزمینی، واحد زمان معمولاً **روز** در نظر گرفته می شود).

اولین قانون اساسی حاکم بر جریان آب زیرزمینی معادله پیوستگی است که اصل بقای جرم را بیان می کند. مطابق شکل زیر، یک حجم کنترل اولیه از خاک که در اطراف یک نقطه با مختصات (x, y, z) متمرکز شده است، در نظر گرفته می شود. در یک لحظه زمانی معین، t ، جرم آب زیرزمینی، M ، موجود در حجم کنترلی از محیط آبخوان را با ابعاد $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ برابر است با:

$$M = \rho \cdot \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

در این رابطه θ (L^3/L^3) ، حجم رطوبت موجود در محیط متخلخل خاک می باشد. ρ (M/L^3) ، چگالی آب است. این مقدار آب می تواند با ورود یا خروج آب های زیرزمینی به حجم کنترل از طرفین، تغییر کند. اصل بقای جرم نشان می دهد که مقدار خالص جریان ورودی منهای جریان خروجی برابر است با میزان تغییر در ذخیره آبخوان نسبت به زمان.

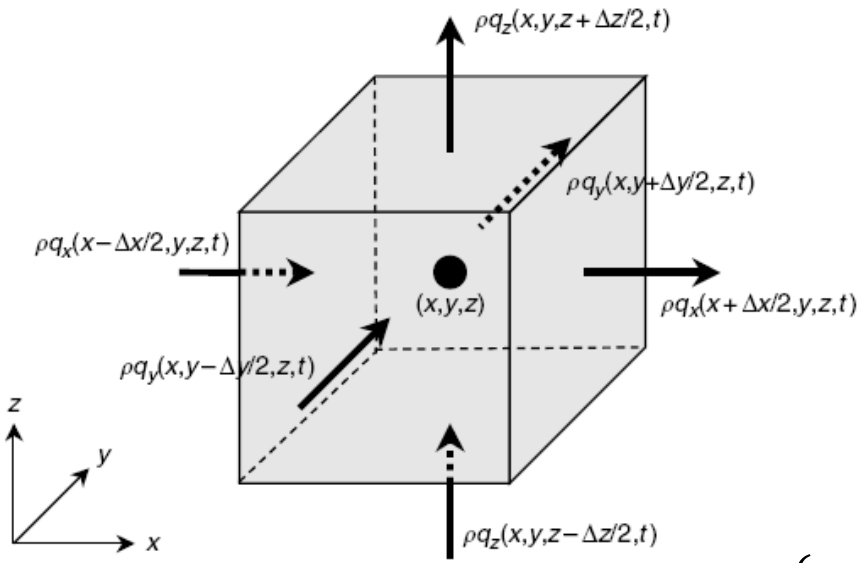


اصل بقای جرم نشان می دهد که مقدار خالص جریان ورودی منهای جریانی خروجی برابر است با میزان تغییر در ذخیره آبخوان نسبت به زمان.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \text{inflow} - \text{outflow}$$

بر اساس این رابطه، ضروری است که مقدار جریان های ورودی و خروجی از هر مقطع محاسبه شوند. اگر بردار دبی حجمی یا نرخ جریان عبوری از واحد سطح هر مقطع برابر با $q = (q_x, q_y, q_z)$ باشد، در این صورت به عنوان مثال، دبی جرمی جریان آب زیرزمینی ورودی از سمت چپ حجم کنترل به صورت رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\rho q_x(x - \Delta x/2, y, z, t) \Delta y \Delta z$$



با توجه به کوچک بودن مقدار Δx ، مقدار q_x در موقعیت $x - \Delta x/2$ را می توان با استفاده از سری تیلور بیان نمود. در این سری از صرفاً عبارات های با مرتبه صفر و یک نگه داشته می شوند:

$$\rho q_x(x - \Delta x/2, y, z, t) \Delta y \Delta z \approx \left(\rho q_x - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

بر اساس رابطه فوق، مقدار جریان تا مرکز حجم کنترل مورد محاسبه قرار می گیرد.

همچنین مقدار دبی جرمی جریان آب زیرزمینی خروجی از سمت راست حجم کنترل در موقعیت $x + \Delta x/2$ به صورت

رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\rho q_x(x + \Delta x/2, y, z, t) \Delta y \Delta z \approx \left(\rho q_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

بر این اساس، اختلاف جریان ورودی و خروجی برابر است با:

$$\begin{aligned} & \left(\rho q_x - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z + \left(\rho q_y - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta z + \left(\rho q_z - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \\ & - \left(\rho q_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \rho q_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z - \left(\rho q_y + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta z - \left(\rho q_z + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

با جایگزینی جریان‌های ورودی و خروجی در معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

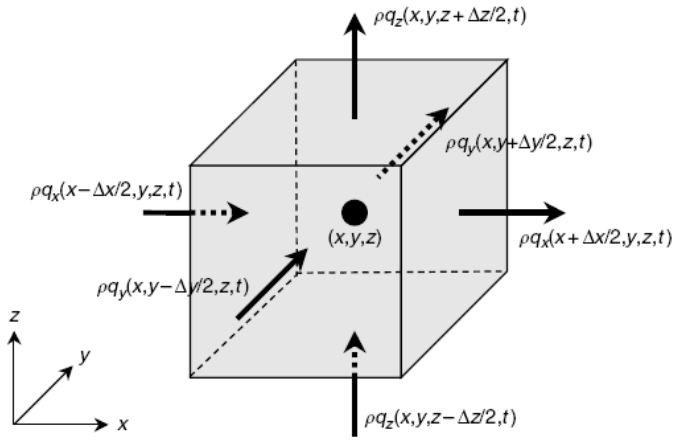
با استفاده از عملگر دلتا $(\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z))$ ، رابطه فوق به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

رابطه فوق تغییرات ذخیره آب در حجم کنترل را نشان می دهد. بر اساس $M = \rho \cdot \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ، می توان مقدار تغییرات

ذخیره را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial (\rho \cdot \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\partial t}$$



$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\partial t}$$

در این عبارت متغیرهای θ ، به دلیل پر و خالی بودن منافذ از آب، ρ ، به دلیل تراکم پذیر بودن آب و $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ، به دلیل اینکه محیط متخلخل می تواند تراکم پذیر باشد، دارای تغییرات زمانی می باشند. با توجه به اینکه تحت شرایط طبیعی، تغییرات عمودی مورد توجه قرار می گیرند، لذا از تغییرات زمانی $\Delta x \cdot \Delta y$ صرف نظر شده است. بنابراین رابطه فوق به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial(\rho)}{\partial t} \theta + \rho \frac{\partial(\theta)}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \rho \theta \frac{\partial(\Delta z)}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y = \rho \left(\frac{\theta}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

میزان تراکم محیط متخلخل را می توان تابعی از فشار آب بیان نمود:

$$\frac{1}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial p}{\partial t}$$

میزان تراکم پذیری آب به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial t}$$

در این رابطه α ضریب تراکم پذیری الاستیک محیط متخلخل (L^2/F) ، فشار آب زیرزمینی (F/L^2) و β ضریب تراکم پذیری آب (L^2/F) می باشد. فرض می شود که سایر عوامل مؤثر بر چگالی همانند مواد محلول و دما ناچیز است. با جایگذاری روابط فوق

در رابطه $\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial(\rho \cdot \theta \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)}{\partial t}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \rho \left(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

با تلفیق رابطه پیوستگی و بقای جرم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ \frac{\partial M}{\partial t} = \rho \left(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{cases} \Rightarrow \rho \left(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = - \left(\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{q})$$

رابطه کلی اصل بقای جرم در آب زیرزمینی

در اغلب موارد، تغییرات چگالی آب از اهمیت کمی برخوردار است و لذا رابطه پیوستگی را می توان به صورت زیر ساده نمود:

$$\left(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) \approx -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

در این رابطه ساده شده، رابطه پیوستگی، تعادل آب زیرزمینی در مقایس حجمی را نشان می دهد. سمت چپ این رابطه بیان کننده تغییر در حجم آب زیرزمینی موجود در محیط متخلخل است. این تغییر در ذخیره می تواند ناشی **متراکم شدن محیط و آب** باشد و یا ناشی از **تغییر در رطوبت حجمی** در نظر گرفته شود.

سمت راست رابطه فوق، همگرایی یا واگرایی نرخ جریان حجمی آب زیرزمینی را نشان می دهد. زمانی که نرخ جریان همگرا است، **ذخیره آبخوان افزایش** می یابد و برعکس، زمانی که واگرا می شود، **ذخیره سازی کاهش** می یابد.

(مثال) معادله جریان آب زیرزمینی برای آبخوانی با هدایت هیدرولیکی زیر را در شرایط پایدار تدوین نمائید.

$$K = K_0(a + be^{cx} + de^{fy})$$

در این رابطه K_0, a, b, c, d, f پارامترهای سیستم می‌باشند.

(حل)

بر اساس رابطه پیوستگی $(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{q}$ ، می‌توان برای شرایط پایدار این رابطه را به صورت زیر ارائه نمود:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0$$

با اعمال قانون داریسی در رابطه فوق:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0$$

با جایگذاری رابطه هدایت هیدرولیکی در رابطه فوق، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_0(a + be^{cx} + de^{fy}) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_0(a + be^{cx} + de^{fy}) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0$$

با مشتق‌گیری و خلاصه نمودن رابطه، خواهیم داشت:

$$(a + be^{cx} + de^{fy}) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + cbe^{cx} \frac{\partial h}{\partial x} + (a + be^{cx} + de^{fy}) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + fde^{fy} \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

معادله حرکت آب زیرزمینی

دومین رابطه اساسی، معادله مومنتموم است که بر اساس قانون دوم نیوتن بیان می شود. یعنی نیروها باعث حرکت یا تغییر در حرکت می شوند. مطابق حجم کنترل شکل زیر، تمامی نیروهای وارد بر آب موجود در حجم کنترل ترسیم می شود.

نیروهایی که به طور معمول بر آب موجود در حجم کنترل وارد می شود، عبارتند از:

✓ نیروهای فشاری (Pressure forces)

✓ نیروی ثقل (Gravity forces)

✓ نیروهای عکس‌العملی وارده از طرف خاک (Reaction forces)

با توجه به اینکه نیروها بردار هستند، لازم است مؤلفه های مختلف آن در جهات مختلف در نظر گرفته شوند.

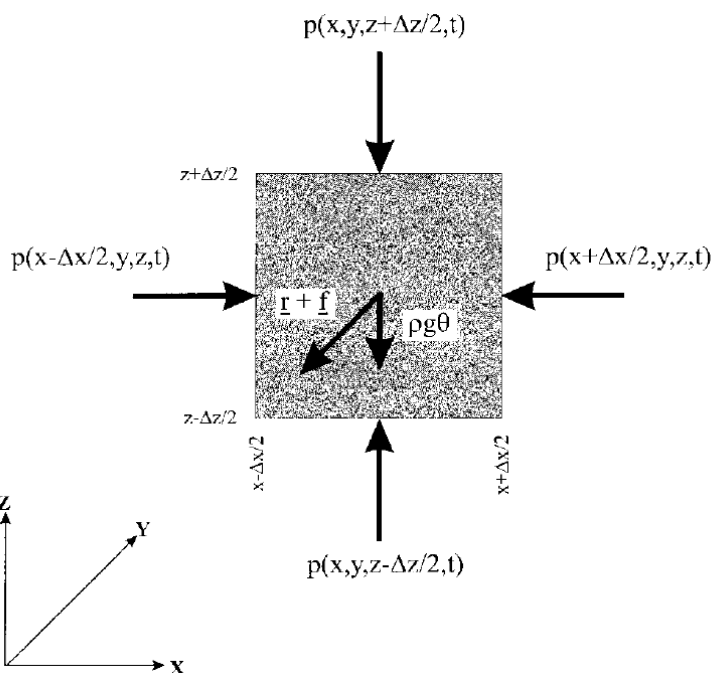
به عنوان مثال، در امتداد سمت چپ حجم کنترل، فشاری که به آب وارد می شود، سهم زیر را در تعادل نیرو در جهت x ایجاد می کند:

$$\theta p(x - \Delta x/2, y, z, t) \Delta y \Delta z$$

علت وجود θ در رابطه فوق این است که آب به میزان θ از مرز را اشغال می کند. به طور مشابه، نیروی در سمت راست حجم کنترل اما در خلاف

جهت، وارد می شود که در جهت تعادل نیروها عمل می نماید:

$$-\theta p(x + \Delta x/2, y, z, t) \Delta y \Delta z$$



با استفاده از سری تیلور خلاصه شده، جهت ارتباط دادن عبارات θp به مرکز حجم کنترل، **مؤلفه نیروی فشار** در جهت x بدست می آید:

$$\left[\left(\theta p - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \theta p}{\partial x} \right) - \left(\theta p + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \theta p}{\partial x} \right) \right] \Delta y \Delta z = - \frac{\partial \theta p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

نیروی فشاری وارده در جهت‌های y و z را نیز می‌توان به طریق مشابه بدست آورد.

نیروی ثقل برابر است با کل وزن آب موجود در حجم کنترل که در خلاف جهت z به حجم کنترل وارد می‌شود:

$$-mg = -\rho V = -\rho g \theta \Delta x \Delta y \Delta z$$

ارزیابی نیروی **عکس‌العملی وارده از طرف خاک** بر روی آب پیچیده است. این شامل نیروهایی است که در برابر فشار آب و نیروهای اصطکاک ناشی از حرکت آب زیرزمینی عمل می‌کنند. ارزیابی این نیروها در سطح منافذ بسیار دشوار است زیرا شکل سطح تماس بین فاز جامد و فاز آب از نظر هندسی بسیار پیچیده است. از آنجا که سطح تماس دقیق، مشخص نیست و بیان آن با عبارات ریاضی بسیار دشوار است، توصیف این نیروها در مقیاس میکروسکوپی غیرممکن است و لازم است از رویکرد ماکروسکوپی استفاده شود. لذا، نیروهای عکس‌العملی معمولاً به عنوان متوسط نیروهایی که ذرات خاک بر واحد حجم آب وارد می‌کنند، تعریف می‌شوند.

چنانچه نیروهای عکس‌العملی در برابر فشار آب و نیروهای اصطکاک را به ترتیب به صورت $r = r(r_x, r_y, r_z)$ و $([F/L^3])$ و

$f = (f_x, f_y, f_z)$ $([F/L^3])$ نشان داده شود، تأثیر این نیروها در جهت x به صورت زیر خواهد بود:

$$(r_x + f_x) \theta \Delta x \Delta y \Delta z$$

به طور مشابه این نیروها را می‌توان در جهت‌های y و z بدست آورد.

تعداد نیروها در سه جهت به صورت روابط زیر خواهد بود:

$$\left[-\frac{\partial \theta p}{\partial x} + (r_x + f_x)\theta \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\left[-\frac{\partial \theta p}{\partial y} + (r_y + f_y)\theta \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\left[-\frac{\partial \theta p}{\partial z} - \rho g \theta + (r_z + f_z)\theta \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

با استفاده از عملگر دلتا $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ می‌توان اثرات تمامی نیروهای عکس‌العملی را به صورت زیر ارائه نمود:

$$[-\nabla(\theta p) - \rho g \theta \nabla z + (\mathbf{r} + \mathbf{f})\theta] \Delta x \Delta y \Delta z$$

چنانچه این رابطه را بر حجم کل آب موجود در حجم کنترل $(\theta \Delta x \Delta y \Delta z)$ تقسیم نمائیم، خواهیم داشت:

$$-\nabla p - \frac{p}{\theta} \nabla \theta - \rho g \nabla z + (\mathbf{r} + \mathbf{f})$$

زمانی که **سیال ساکن** باشد، مجموع تمام نیروها باید صفر در نظر گرفته شود. در این صورت نیروی اصطکاکی f برابر با صفر بوده

و فشار آب به صورت هیدرواستاتیک $(\nabla p = \rho g \nabla z)$ است و آن را می‌توان به عنوان نیروی عکس‌العملی کلی (r) ذرات در برابر

فشار آب در نظر گرفت. بنابراین نیروی عکس‌العملی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$r = \frac{p}{\theta} \nabla \theta$$

با جایگذاری $r = \frac{p}{\theta} \nabla \theta$ در $-\nabla p - \frac{p}{\theta} \nabla \theta - \rho g \nabla z + (\mathbf{r} + \mathbf{f})$ می‌توان رابطه تعادل نیروها را به صورت زیر ساده نمود:

$$-\nabla p - \rho g \nabla z + \mathbf{f}$$

در مواردی که آب زیرزمینی **دارای حرکت** می‌باشد، مجموع نیروها صفر نبوده و برابر است با تغییرات مومنتوم سیال.

همچنین اصطکاک در امتداد سطح مشترک آب و ذره غیر صفر است و باید بر اساس ویژگی حرکت و اصطکاک مشخص شود. با توجه به اینکه سرعت جریان آب زیرزمینی در شرایط طبیعی، بسیار کند است، لذا می‌توان از تغییرات مومنتوم صرف‌نظر کرده و در مقایسه با سایر نیروهایی که بر سیال وارد می‌شوند، می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت. لذا اگرچه سیال در حال حرکت است، نیروهای وارد بر سیال تقریباً در حالت تعادل بوده و به صورت زیر می‌باشند:

$$-\nabla p - \rho g \nabla z + \mathbf{f} \approx 0$$

این نوع جریان در دینامیک سیالات به **حرکت خزنده (creeping motion)** معروف است. نیروهای فعال ایجاد کننده حرکت، مانند فشار و گرانش، بلافاصله با مقاومت در برابر نیروهای اصطکاک با قدرت برابر متعادل می‌شوند. در محیط‌های متخلخل این به دلیل سطح تماس زیاد بین مایع و ذرات جامد است که باعث اصطکاک گسترده می‌شود، به طوری که از حرکت قابل توجه سیال جلوگیری می‌شود. همچنین با توجه به وجود لزجت آب، نیروی اصطکاک در نتیجه انتقال مومنتوم لزجت بین دیواره‌های منافذ ساکن و سیال متحرک ایجاد می‌شود.

به طور کلی در یک جریان لزج خزنده در یک محیط همسان، نیروی مقاومت کلی مقاوم در برابر جریان سیال به **لزجت سیال**، **بزرگی جریان و موانع موجود در میدان جریان** وابسته است. لذا نیروی اصطکاک را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{f} = -\frac{\mu}{k} \mathbf{q}$$

در این رابطه μ لزجت دینامیکی سیال و k نفوذپذیری ذاتی و \mathbf{q} جریان آب زیرزمینی می‌باشد.

با قرار دادن رابطه $\mathbf{f} = -\frac{\mu}{k}\mathbf{q}$ در رابطه $-\nabla p - \rho g \nabla z + \mathbf{f} \approx 0$ ، معادله حرکت جریان آب زیرزمینی به صورت زیر خواهد شد:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho g \nabla z)$$

این عبارت شبیه قانون دارسی است. در واقع این رابطه تعمیم قانون دارسی است که جریان یک سیال را در یک محیط متخلخل توصیف می‌کند، در صورتی که سیال دارای چگالی و لزجت متغیر باشد. چنین شرایطی می‌تواند در سفره‌های ساحلی که در آن آب شور و شیرین با هم مخلوط می‌شوند، یا در مخازن زمین گرمایی که چگالی و لزجت سیال با دما تغییر می‌کند، وجود داشته باشد.

در صورتی که گرادیان چگالی قابل توجه نباشد، یا زمانی که چگالی تنها به دلیل تراکم پذیری سیال تغییر کند، معادله حرکت را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$\mathbf{q} = -\frac{k\rho g}{\mu}(\nabla(\varphi + z)) = -K\nabla h$$

در این رابطه:

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \text{ : هدایت هیدرولیکی } ([L/T])$$

بر اساس این رابطه می‌توان دریافت که قانون دارسی، که در اصل مبتنی بر شواهد تجربی بود، چیزی نیست جز قانون دوم حرکت نیوتن که به شکلی مناسب برای توصیف جریان سیالات در محیط متخلخل اصلاح شده است.

$$\varphi = \int \frac{dp}{\rho g} \text{ : پتانسیل فشاری } ([L])$$

$$h = \varphi + z \text{ : پتانسیل آب زیرزمینی } ([L])$$

بر اساس رابطه $q = -\frac{k\rho g}{\mu} (\nabla(\varphi + z)) = -K\nabla h$ موارد زیر قابل نتیجه گیری است:

- فرض اصلی منتهی به قانون داری این است که به دلیل نیروهای اصطکاک زیاد که نیروهای محرکه حرکت را متعادل می کند، حرکت یک سیال در یک محیط متخلخل بسیار محدود است. لذا قانون داری در مواردی مانند جریان آب در خاک یا سایر انواع محیط های متخلخل دانه ای، یا جریان در سنگ های شکسته قابل استفاده است، اما در مواردی که شامل غارها یا دهانه های بزرگ دیگر مانند شکاف ها، شکاف ها و غیره می شود، قابل اجرا نیست.
- قانون داری یک رویکرد ماکروسکوپی است. در سطح میکروسکوپی متغیرهایی مانند هدایت هیدرولیکی یا نفوذپذیری وجود ندارد. با این حال، این واقعاً موضوع مهمی نیست، زیرا عدم قطعیت در به دست آوردن مقادیر دقیق برای هدایت هیدرولیکی یا نفوذپذیری تأثیر بسیار بیشتری بر دقت کلی دارد. در واقع، بررسی های میدانی نشان می دهد که محیط های متخلخل طبیعی مانند لایه های زمین، تنوع و ناهمگنی زیادی در خواص رسانایی از خود نشان می دهند که تعیین کمیت دقیق آن ها با روش های تجربی یا قطعی دشوار است.
- با توجه به اینکه رابطه داری یک رابطه برداری است، لذا در سیستم مختصات کارتزین سه بعدی و برای یک محیط متخلخل همگن و همسان، این رابطه عبارت است از:

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x}, q_y = -K \frac{\partial h}{\partial y}, q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z}$$
- در سیستم مختصات سیلندری (cylindrical coordinate system):

$$q_r = -K \frac{\partial h}{\partial r}, q_\varphi = -\frac{K}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z}$$

علاوه بر ناهمگنی (تغییرات نقطه ای تخلخل و هدایت هیدرولیکی)، ناهمسانی (تغییرات در جهات مختلف) نیز در محیط های متخلخل امکان پذیر است. در این حالت به دلیل تغییرات برخی ویژگی های محیط متخلخل در جهت های مختلف مانند وجود شکستگی ها و لایه بندی ها، هدایت هیدرولیکی وابسته به جهت است. در چنین موقعیت هایی می توان قانون داری را به صورت

زیر بسط داد:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

$$q_x = -K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - K_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} - K_{xz} \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$q_y = -K_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} - K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} - K_{yz} \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$q_z = -K_{xz} \frac{\partial h}{\partial x} - K_{yz} \frac{\partial h}{\partial y} - K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z}$$

نکته: در سازندهای لایه ای که معمولاً منشأ رسوبی دارند، به دلیل وجود گرادیان در یک جهت، امکان وجود جریان در جهت های دیگر فراهم می شود. در لایه بندی افقی سازندها به طور معمول، تنها دو مؤلفه هدایت هیدرولیکی مدنظر قرار می گیرد: هدایت هیدرولیکی افقی (K_h) و هدایت هیدرولیکی عمودی (K_v)، در این حالت، قانون داری به صورت زیر ساده می شود:

$$q_x = -K_h \frac{\partial h}{\partial x}, \quad q_y = -K_h \frac{\partial h}{\partial y}, \quad q_z = -K_v \frac{\partial h}{\partial z}$$

معادله جریان آب زیرزمینی

با ترکیب معادله پیوستگی و قانون داری می توان معادله جریان آب زیرزمینی را استخراج نمود.

$$\begin{cases} \left(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} \\ q = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \end{cases} \Rightarrow \theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \right]$$

در این رابطه، میزان رطوبت، θ ، مرتبط با فشار آب است، چه در شرایط اشباع، که میزان رطوبت برابر با تخلخل است و به فشار آب ناشی از تغییر شکل الاستیک محیط متخلخل وابسته است. یا در شرایط غیر اشباع، میزان رطوبت و فشار آب (یا مکش) (که رابطه نگهداشت آب نامیده می شود) با هم مرتبط می باشند. بر این اساس می توان معادله جریان آب زیرزمینی را تنها به عنوان تابعی از فشار آب به صورت زیر بیان نمود:

$$\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \right] \Rightarrow S_p \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \right]$$

$$S_p = \theta(\alpha + \beta) + \frac{\partial \theta}{\partial p} \quad , S_p \text{ ضریب ذخیره محیط متخلخل است و وابسته به تغییرات فشار می باشد (} [L^2/F] \text{)}.$$

ضریب ذخیره به پارامترهای مختلفی همانند **خصوصیات خاک و آب و شرایط اشباع یا غیر اشباع بودن** محیط متخلخل وابسته است. لذا، نسبتاً پیچیده است اما تفسیر فیزیکی ساده ای دارد. در واقع **ضریب ذخیره، حجم آب آزاد شده در واحد حجم محیط متخلخل به ازای هر واحد کاهش فشار آب** را نشان می دهد.

معادله جریان آب زیرزمینی در مختصات دکارتی با در نظر گرفتن هدایت های هیدرولیکی افقی و عمودی به صورت زیر است:

$$S_p \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) \right] \Rightarrow S_p \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_h}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_h}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_v}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) \right)$$

رابطه فوق، بیانگر معادله کلی حرکت سه بعدی جریان آب های زیرزمینی است. لذا این معادله تابعی از **فشار آب** (نه تابعی از پتانسیل آب زیرزمینی) می باشد.

در عمل، معمولاً اثرات چگالی نادیده گرفته می شود. لذا معادله جریان آب زیرزمینی را می توان با ترکیب معادله پیوستگی با شکل ساده قانون دارسی به صورت زیر ارائه نمود:

$$\begin{cases} \left(\theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} \\ \Rightarrow \theta(\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot (K \nabla h) \\ \mathbf{q} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g \nabla z) = -\frac{k}{\mu} (\nabla \rho g \varphi + \rho g \nabla z) = -K \nabla h \end{cases}$$

بر اساس رابطه فوق می توان دریافت زمانی که چگالی سیال ثابت است، اختلاف فشار آب در زمان با تغییرات زمانی پتانسیل آب زیرزمینی مرتبط است $\left(\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \right)$. لذا رابطه فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\theta(\alpha + \beta) \rho g \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot (K \nabla h)$$

$$\theta(\alpha + \beta)\rho g \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot (K\nabla h)$$

از آنجا رابطه فوق، مقدار آب زیرزمینی موجود (θ) و پتانسیل آب زیرزمینی (h) را به ویژگی های محیط متخلخل و سیال، با در نظر گرفتن پیوستگی مکانی و زمانی، مرتبط می کند، لذا این رابطه به عنوان یک معادله اساسی جریان آب زیرزمینی مطرح است.

جهت حل این معادله، لازم است اطلاعات بیشتری از متغیرهای θ و h در دسترس باشد. به عنوان مثال، تحت شرایط اشباع محیط متخلخل، میزان رطوبت (θ) با تخلخل برابر است، و با فرض تراکم ناپذیر بودن ذرات جامد، تغییر در تخلخل با فشردگی محیط متخلخل وابسته است که به نوبه خود به فشار آب یا پتانسیل آب زیرزمینی بستگی دارد. لذا معادله جریان آب زیرزمینی به

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{(1-n)}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} = \alpha \frac{(1-n)\partial p}{\partial t} = (1-n)\alpha\rho g \frac{\partial h}{\partial t}$$

صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{cases} \theta(\alpha + \beta)\rho g \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot (K\nabla h) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} = (1-n)\alpha\rho g \frac{\partial h}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K\nabla h)$$

S_0 ، ضریب ذخیره ویژه است $[L^{-1}]$. این متغیر را می توان به صورت فیزیکی به عنوان حجم آب آزاد شده در واحد محیط متخلخل اشباع در نتیجه یک واحد کاهش پتانسیل آب زیرزمینی تعریف نمود.

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h)$$

مقدار S_0 معمولاً بسیار کوچک است زیرا تغییر شکل الاستیک لایه های زمین یا آب محدود است. البته تغییر شکل پلاستیک لایه های زمین که متشکل از موادی مانند خاک رس یا ذغال سنگ نارس (peat) قابل توجه می باشد. چنین تغییر شکل هایی عمدتاً تحت تأثیر بارهای خارجی یا پمپاژ گسترده آب زیرزمینی رخ می دهد و منجر به فرونشست زمین می شوند. معادله جریان آب زیرزمینی محیط اشباع در مختصات دکارتی با استفاده از هدایت هیدرولیکی عمودی و افقی را می توان به صورت زیر ارائه نمود:

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

این معادله پرکاربردترین معادله جریان آب زیرزمینی در کارهای عملی است. این معادله از نوع انتشاری است و نشان می دهد که اختلاف پتانسیل با سرعتی که وابسته به K/S_0 است در کل محیط متخلخل منتشر خواهد شد. از این رو، با توجه به کوچک بودن مقدار S_0 ، این فرآیند می تواند نسبتاً سریع انجام شود مگر اینکه K نیز کوچک باشد (همانند جریان لایه های رسی).

معادله جریان در مختصات استوانه ای (r, φ, z) به صورت زیر است:

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_h \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

این معادله برای پیش بینی جریان آب زیرزمینی به سمت چاه ها مورد استفاده قرار می گیرد.

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla h)$$

معادله فوق برای شرایط پایدار (مستقل از زمان) به صورت زیر می باشد:

$$\nabla \cdot (K \nabla h) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0$$

این معادله به وضوح نشان می دهد که حرکت آب زیرزمینی یک مسأله **وابسته به جریان پتانسیل** است. نیروهای محرک برای حرکت در این رابطه، **اختلاف در پتانسیل آب زیرزمینی** است و جریان های حاصل به خواص رسانایی محیط متخلخل (هدایت هیدرولیکی) بستگی دارد. به این ترتیب جریان آب زیرزمینی نیز شبیه انواع دیگر جریان های پتانسیل همانند جریان گرما در محیط های رسانای گرما تحت تأثیر گرادیان دما، یا جریان الکتریکی در مواد رسانای الکتریکی تحت تأثیر اختلاف پتانسیل الکتریکی می باشد.

شرایط مرزی جهت حل معادله جریان آب زیرزمینی

معادلات جریان آب زیرزمینی، معادلات دیفرانسیل جزئی هستند که متغیر وابسته (پتانسیل آب زیرزمینی) را به متغیرهای مستقل (مختصات حوزه جریان و زمان) مرتبط می‌کنند. با این حال، معادلات جریان تنها در داخل حوزه جریان معتبر می‌باشند و نه در مرزها، زیرا در بخش‌هایی انتهایی محیط متخلخل، پدیده‌های دیگری رخ می‌دهد که می‌تواند بر جریان آب زیرزمینی در داخل منطقه مدلسازی تأثیرگذار باشد.

این فعل و انفعالات در مرزها توسط قوانین فیزیکی دیگر کنترل می‌شوند و باید به طور جداگانه توسط عبارات ریاضی توصیف شوند که به اصطلاح شرایط مرزی گفته می‌شود.

ابتدا بعد از زمان را در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که معادلات جریان گذرای آب زیرزمینی حاوی مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به زمان است، می‌توان از نظر ریاضی نشان داد که فقط شرایط در شروع، یعنی در زمان صفر، مورد نیاز است. از این رو، دانستن توزیع متغیر وابسته در حوزه جریان در شروع مدلسازی کافی است. به عنوان مثال، زمانی که پتانسیل آب زیرزمینی متغیر وابسته باشد، شرایط اولیه را می‌توان به صورت زیر ارائه نمود:

$$h(x, y, z, 0) = h_0(x, y, z)$$

مقدار تراز سطح آب زیرزمینی در شروع مدلسازی که تابعی از مکان است.

شرایط مرزی برای حوزه فیزیکی تا حدودی پیچیده تر است. از نظر ریاضی، می‌توان نشان داد که از آنجایی که معادلات جریان آب زیرزمینی حاوی مشتقات جزئی مرتبه دوم نسبت به مکان است، شرایط در هر نقطه از مرز حوزه جریان فیزیکی، حتی زمانی که مرزها به سمت بی‌نهایت تمایل دارند، مورد نیاز است.

با توجه به وجود تعاملات پیچیده بین جریان آب زیرزمینی در داخل و خارج از مرزها، توانایی ما برای درک دقیق چنین پدیده‌هایی نسبتاً محدود است، لذا شرایط مرزی معمولاً به روشی ساده توصیف می‌شوند. به طور کلی، سه نوع شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شود:

۱- **شرایط مرزی نوع اول (Dirichlet BC):** زمانی اعمال می‌شود که مقدار متغیر وابسته در مرز مشخص باشد. به عنوان مثال،

در مورد پتانسیل های آب زیرزمینی، چنین شرایط مرزی خواهد بود:

$$h(x_b, y_b, z_b, t) = h_b(t)$$



مختصات نقطه ای بر روی مرز آبخوان



تراز سطح آب زیرزمینی که در زمان t و بر روی مرز مشخص است.

این نوع مرز به عنوان شرایط مرزی پتانسیل (potential boundary condition) نامیده می‌شود و زمانی استفاده می‌شود که

آب زیرزمینی **در تماس با یک بدنه آبی با پتانسیل شناخته شده** h_b باشد، مثلاً یک رودخانه، دریاچه، یا مخزن و غیره.

در واقع در این نوع مرز، هر جریان آب زیرزمینی که در داخل آبخوان رخ دهد، هیچ تأثیری بر تراز سطح آب در مرز مرتبط با این

بدنه آبی نخواهد داشت و مقدار تراز در مرز ثابت می‌ماند.

۲- **شرایط مرزی نوع دوم (Neumann BC):** به عنوان شرایط مرزی جریان (flux boundary conditions) می‌باشند که در

آن فرض می‌شود میزان جریان آب زیرزمینی مبادله شده توسط مرز مشخص است. مقدار تبادل آب توسط مؤلفه شار آب

زیرزمینی عمود بر مرز مشخص می‌شود، به طوری که شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\rightarrow q_n(x_b, y_b, z_b, t) = q_b(t)$$

مؤلفه شار جریان عمود بر مرز آبخوان

مقدار شار جریان در مرز که در زمان t مشخص است.

این نوع شرایط مرزی تابعی از متغییر وابسته (تراز سطح آب زیرزمینی) بوده و بر اساس رابطه داری ارائه می شود:

$$q_n = -K \frac{\partial h}{\partial n} = q_b(t)$$

در این رابطه، $\partial h / \partial n$ ، مشتق پتانسیل عمود بر مرز را نشان می دهد.

از دیدگاه ریاضی، انتخاب جهت مثبت نرمال به سمت مرز، مثبت یا منفی بودن مقادیر q_n را تعیین می کند. با این حال، در عمل، شارهای ورودی به و خروجی از حوزه جریان آبخوان به ترتیب به عنوان جریانات مثبت و منفی، در نظر گرفته می شوند.

شرایط مرزی با شار ثابت به این معنی است که وضعیت جریان آب زیرزمینی در داخل حوزه جریان و در مرز هر چه باشد، توسط شار نرمال مرز ثابت می شود. نمونه های متداول از چنین شرایطی عبارتند از: پمپاژ چاه، تغذیه آب زیرزمینی، نفوذ و غیره. نمونه دیگر از این نوع شرایط جریان، مرز غیرقابل نفوذ است که در آن مؤلفه شار عمود بر مرز کاملاً صفر است.

۳- شرط مرزی نوع سوم (Cauchy BC): ترکیبی از دو نوع شرایط مرزی قبل است. این شرایط مرزی زمانی اعمال می شود که تراز سطح آب و جریان نرمال در مرز با یکدیگر مرتبط باشند. چنین شرایطی در حالتی که محیط آبخوان در تماس با یک بدنه آبی با بار پتانسیل ثابت h_b باشد اعمال می شود. در این شرایط تبادل بین مخزن آب زیرزمینی و بدنه آبی به دلیل وجود برخی محدودیت ها، محدود است. از نظر ریاضی، این شرط مرزی به صورت زیر بیان می شود:

$$q_n(x_b, y_b, z_b, t) = C_b (h_b(t) - h(x_b, y_b, z_b, t))$$

C_b ، نشان دهنده رسانایی مرز (T^{-1}) بین مخزن آب زیرزمینی و منبع تغذیه و یا تخلیه خارجی است.

$$q_n(x_b, y_b, z_b, t) = C_b(h_b(t) - h(x_b, y_b, z_b, t))$$

پارامتر C_b را می توان به صورت فیزیکی به عنوان ظرفیت رسانایی یک لایه مرزی تراوا موجود بین حوزه جریان آب زیرزمینی و بدنه آبی تشریح نمود:

رسانایی هیدرولیکی لایه مرزی

$$C_b = K_b / D_b$$

ضخامت لایه مرزی (همانند ضخامت بستر

رودخانه در تعامل با آبخوان)

(هدایت هیدرولیکی بستر رودخانه)

نمونه هایی از این شرایط مرزی:

➤ ارتباط یک رودخانه با آب زیرزمینی: این تماس به دلیل وجود یک لایه گلی در بستر رودخانه محدود می شود.

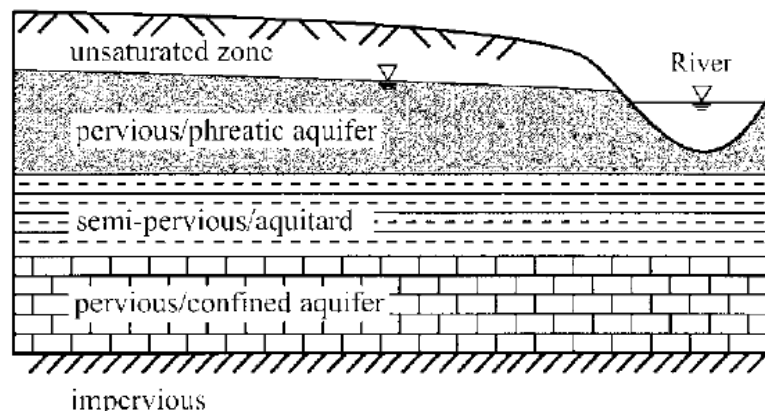
➤ چاهی با شبکه مشبک گرفته شده (دچار گرفتگی) است.

نکته: یکی از پیچیده ترین شرایط مرزی، تراز سطح آب زیرزمینی است. در واقع، سطح آب یک مرز واقعی نیست، زیرا جریان آب زیرزمینی، در شرایط وجود جریان تغذیه ایی از محیط غیراشباع، می تواند از سطح ایستابی عبور کند که در این حالت، انتقال آب بین مناطق غیر اشباع و اشباع صورت می گیرد. با توجه به دشوار بودن حل جریان غیراشباع، این حالت اغلب نادیده گرفته می شود و سطح آب به عنوان مرز بالایی از حوزه جریان آب زیرزمینی لحاظ می شود.

رویکرد هیدرولیکی در جریان آب زیرزمینی

به طور کلی، جریان آب زیرزمینی سه بعدی است، اما به دلیل هندسه لایه های زمین و تفاوت در رسانایی هیدرولیکی، جریان های واقعی آب زیرزمینی تمایل دارند در جهات خاصی متمرکز شوند. این امر به دلیل گسترش افقی لایه های زمین در فواصل زیاد است در حالی که در راستای عمودی گسترش لایه ها نسبتاً محدود است.

به دلیل تنوع زیاد در خواص هدایت هیدرولیکی، لایه های زمین را می توان به سه دسته زیر تقسیم نمود:

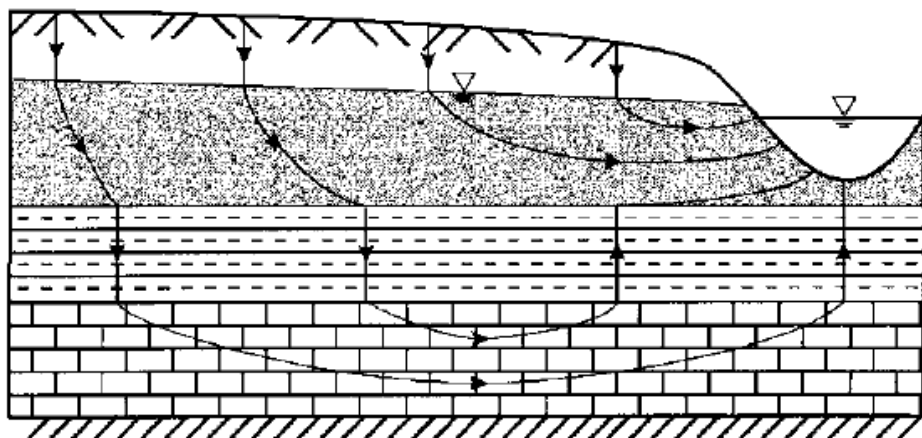


۱- سازندهای نفوذپذیر یا آبخوان (Aquifer)

۲- سازندهای نیمه تراوا (Aquitards)

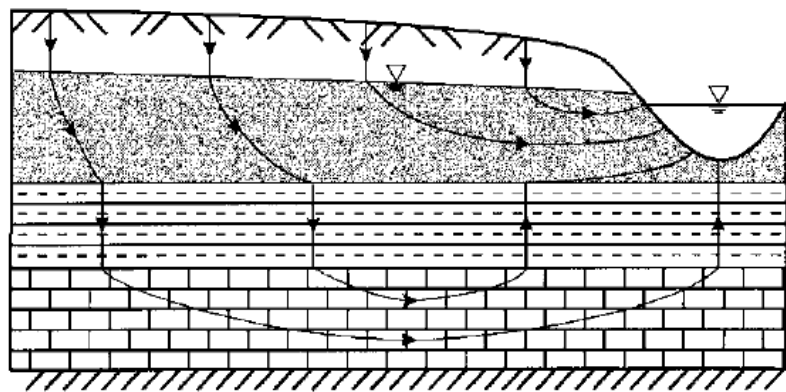
۳- سازندهای غیر قابل نفوذ

با توجه به اینکه آب توسط یک محیط متخلخل در امتداد مسیری با **کمترین مقاومت جریان** می یابد، لذا آب های زیرزمینی عمدتاً به صورت **طولی در سازندهای نفوذپذیر** و به صورت **عرضی در لایه های نیمه تراوا** حرکت می کنند. بر این اساس به دلیل لایه بندی افقی سازندها، جریان آب زیرزمینی در آبخوان ها به صورت افقی و در لایه های نیمه تراوا، عمودی است.

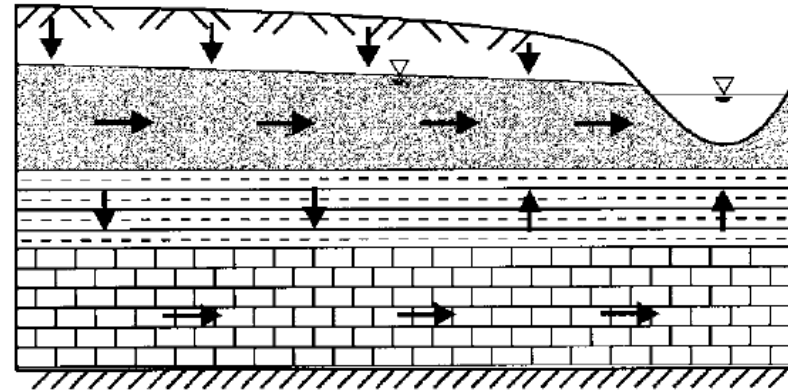


مسیرهای واقعی جریان آب زیرزمینی

بر این اساس (مطابق شکل زیر) به جای در نظر گرفتن جریان سه بعدی، می توان جریان افقی را در آبخوان و جریان عمودی را در لایه نیمه تراوا به عنوان جریانات غالب در نظر گرفت. این مفهوم به عنوان رویکرد هیدرولیکی در جریان آب زیرزمینی نامیده می شود، زیرا حرکت به عنوان جریان آب در لوله ها یا کانال ها در نظر گرفته می شود. در مورد آبخوان آزاد (phreatic)، این نظریه به نام دو دانشمندی که در نیمه دوم قرن نوزدهم این رویکرد را ارائه دادند، **نظریه دوپویی-فورشهائمر** (Dupuit-Forchheimer) نامیده شد.



مسیرهای واقعی جریان آب زیرزمینی



جهت جریان غالب در آبخوان

برای اینکه درک روشنی از مفاهیم اساسی رویکردهای هیدرولیکی ارائه شود، معادله حرکت آب زیرزمینی به صورت ساده بررسی می شود. (الف) یک آبخوان محدود که توسط یک سنگ کف $b(x,y)$ و سطح زمین $S(x,y)$ محدود شده است، در نظر گرفته می شود. ضخامت این آبخوان با $D = S - b$ است. در این آبخوان به دلیل کم بودن اختلاف پتانسیل عمودی، بار هیدرولیکی (h) تقریباً مستقل از Z است و نرخ جریان حجمی افقی در کل ضخامت آبخوان، در جهت x ، از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q_x = \int_b^S q_x dz = \int_b^S -K_h \frac{\partial h}{\partial x} dz \approx - \int_b^S K_h dz \frac{\partial h}{\partial x} = -T \frac{\partial h}{\partial x}$$

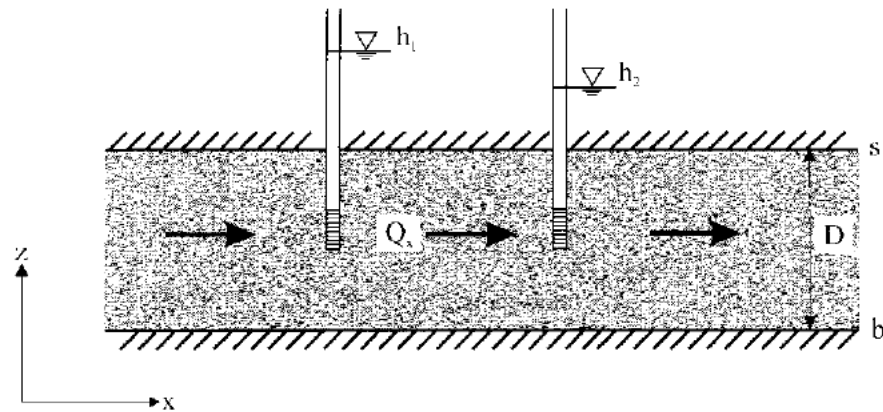
$$T = \int_b^s K_h dz \quad \text{ضریب قابلیت انتقال } (L^2/T)$$

به طور مشابه، نرخ جریان حجمی عمودی در کل ضخامت آبخوان، در جهت y ، از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q_y = -T \frac{\partial h}{\partial y}$$

قابلیت انتقال پارامتری است که هدایت افقی کلی یک آبخوان محدود را بیان می کند. معادلات Q_x و Q_y ، حرکت افقی کلی آب

های زیرزمینی را در یک آبخوان محدود توصیف می کنند.



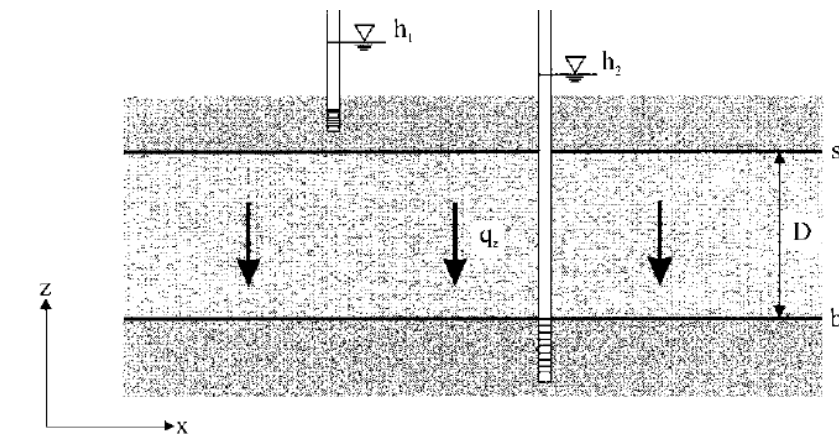
(ب) در یک آبخوان نشتی محدود به دو آبخوان آزاد و محصور، جریان عمودی می تواند از یک آبخوان به آبخوان دیگر عبور کند. این

شار عمودی آب زیرزمینی را می توان با قانون داریسی محاسبه نمود:

$$q_z = -K_V \frac{h_2 - h_1}{D} = C(h_1 - h_2)$$

هدایت هیدرولیکی عمودی لایه نشتی

ضخامت لایه نشتی



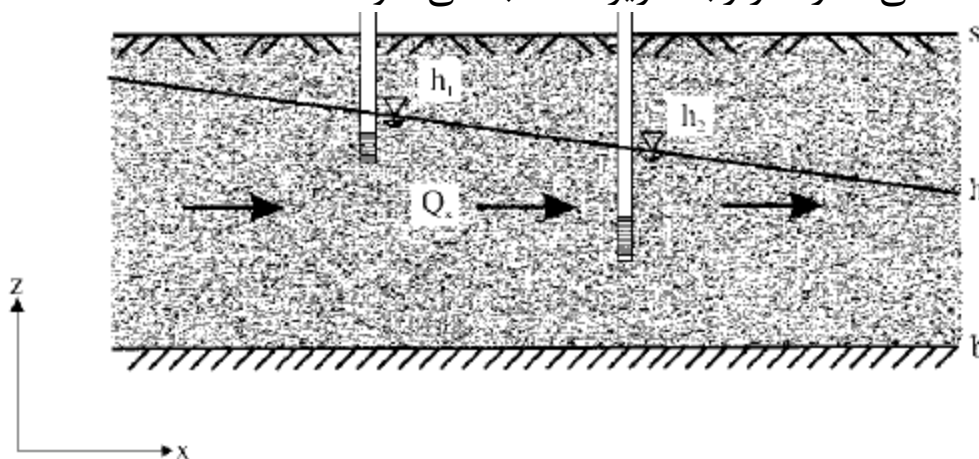
$$q_z = -K_V \frac{h_2 - h_1}{D} = C(h_1 - h_2)$$

گرادیان پتانسیل برابر با اختلاف بار هیدرولیکی آبخوان های دو طرف آبخوان نشتی می باشد.

انتقال پذیری (conductance) یا ضریب نشت (leakage coefficient)

ضریب نشت دارای ابعاد T^{-1} است. این ضریب، ظرفیت نشتی یک لایه آکی تارد را بیان می کند و امکان انتقال عمودی آب زیرزمینی را بین دو آبخوان فراهم می نماید.

ج یک آبخوان آزاد (phreatic) به صورت شماتیک در شکل زیر نشان داده شده است. آبخوان از پایین توسط $b(x,y)$ و از بالا به سطح خاک $s(x,y)$ محدود می شود. در واقع، مرز بالایی واقعی، سطح آب است. با توجه به ناچیز بودن جریان عمودی آب زیرزمینی، h تقریباً مستقل از z است و تقریباً با موقعیت سطح ایستابی، که سطح بالایی ناحیه اشباع است، منطبق است. در نتیجه، جریان کل آب زیرزمینی که به صورت افقی از آبخوان در جهت x می گذرد، از رابطه زیر محاسبه می شود:



$$Q_x = \int_b^s q_x dz = \int_b^h -K_h \frac{\partial h}{\partial x} dz$$

$$\approx - \int_b^h K_h dz \frac{\partial h}{\partial x} = -K_e (h - b) \frac{\partial h}{\partial x}$$

در این رابطه از جریان افقی در محیط غیراشباع صرفنظر می شود. K_e نیز به عنوان هدایت هیدرولیکی مؤثر می باشد.

$$K_e \approx -\frac{1}{(h-b)} \int_b^h K_h dz$$

در صورت وجود یک محیط همگن، K_e برابر با K_h است. با این حال، لایه های زمین به طور کلی ناهمگن هستند، به طوری که K_e باید بر اساس میانگین هدایت هیدرولیکی لایه ها تعیین شود و به عنوان همگن سازی (homogenization) نامیده می شود و نیاز به بررسی دقیق ویژگی های هیدروژئولوژیکی و چینه شناسی زیرسطحی دارد. عبارتی مشابه را می توان برای جریان در جهت y ارائه نمود:

$$Q_y = -K_e(h-b) \frac{\partial h}{\partial y}$$

روابط ارائه شده بر مبنای رویکرد Dupuit است که فرض می کند جریان آب زیرزمینی در یک سفره آب زیرزمینی آزاد متناسب با شیب سطح آب زیرزمینی است. با توجه به متغیر بودن ضخامت اشباع در آبخوان آزاد، جریان افقی و عمودی حاکم بر این آبخوان ها را یا در نظر گرفتن $H = h - b$ ، می توان به صورت زیر ارائه نمود:

$$Q_x = -K_e H \frac{\partial H}{\partial x} = -K_e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H^2}{2} \right)$$

$$Q_y = -K_e H \frac{\partial H}{\partial y} = -K_e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H^2}{2} \right)$$

این روابط جهت تشریح جریان آب زیرزمینی در آبخوان های آزاد جایگزین روابط داری می شوند.

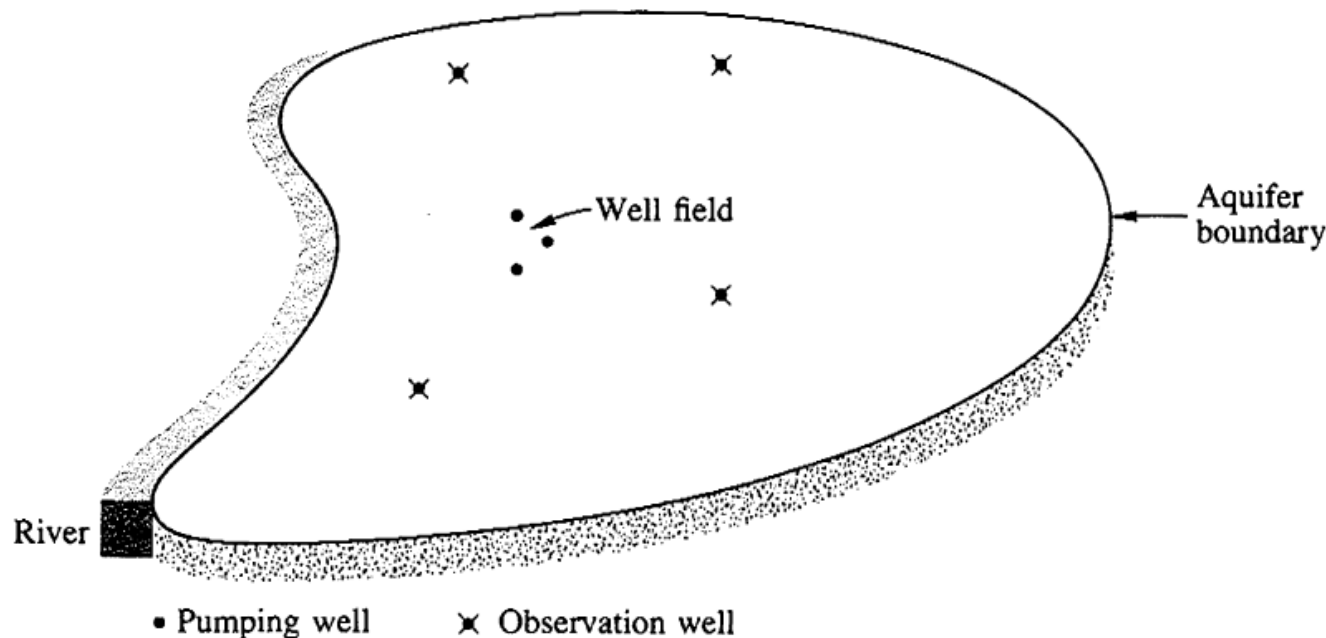
حل عددی معادله جریان آب زیرزمینی

از دهه ۱۹۶۰، زمانی که کامپیوترهای دیجیتال پرسرعت به طور گسترده در دسترس قرار گرفتند، مدل‌های عددی بهترین نوع مدلسازی برای مطالعه آب‌های زیرزمینی بودند. برای این منظور دو نوع مدلسازی با استفاده از روش‌های عددی در نظر گرفته می‌شود:

۲- مدل‌های اجزای محدود (Finite element)

۱- مدل‌های تفاضل محدود (Finite difference)

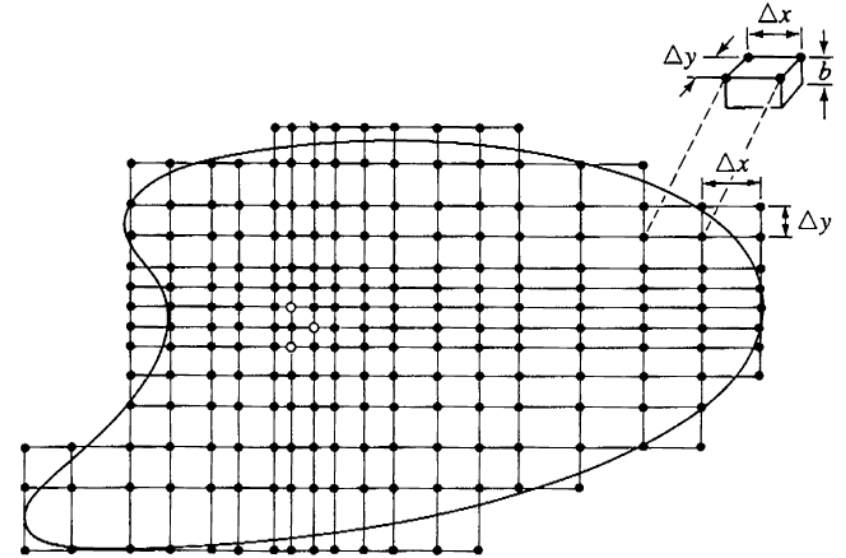
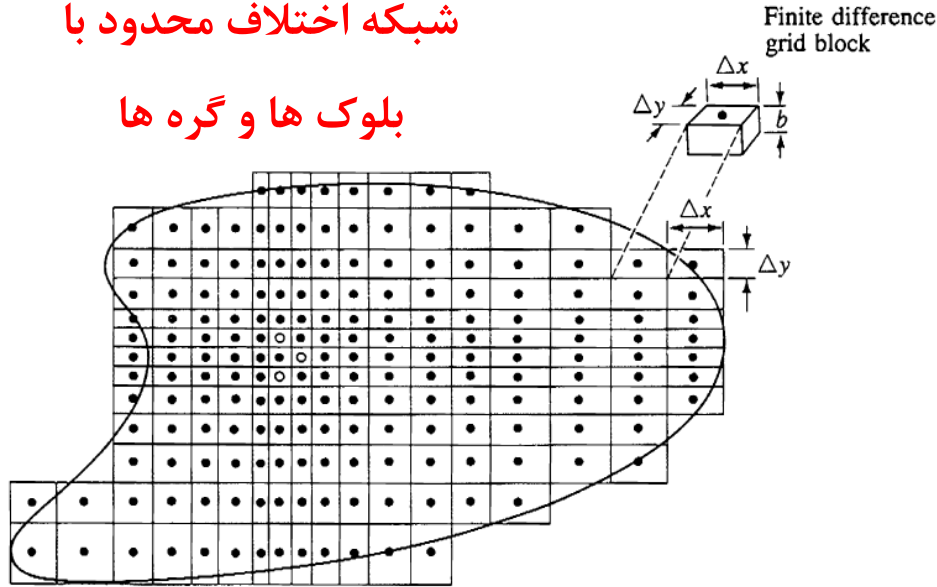
در هر دو نوع مدلسازی جهت حل معادلات جریان، سیستمی از نقاط گره‌ای بر روی محدوده آبخوان قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، در شکل زیر، آبخوانی را نشان می‌دهد که از یک طرف توسط رودخانه محدود شده و به صورت منطقه‌ای با بارندگی تغذیه می‌شود. در این آبخوان هیچ جریان افقی به خارج یا به داخل آبخوان به جز در امتداد رودخانه وجود ندارد.



نمایش مدلسازی با استفاده از روش تفاضل محدود و المان محدود در شکل های زیر نمایش داده شده است.

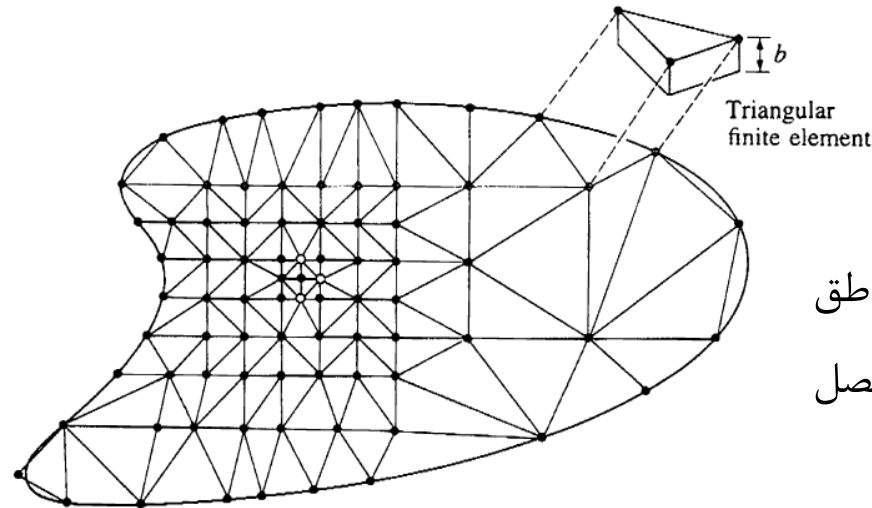
شبکه اختلاف محدود با

بلوک ها و گره ها



شبکه اختلاف محدود با

گره های مرکزی

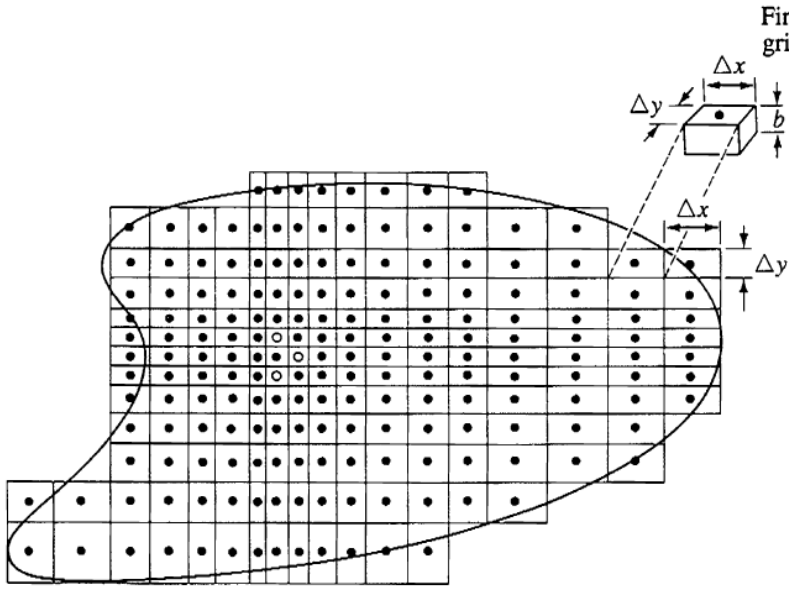


شبکه المان محدود با المان های مثلثی: مفهوم المان (یعنی مناطق

مثلثی مشخص شده توسط خطوطی که نقاط گره ای را به هم متصل

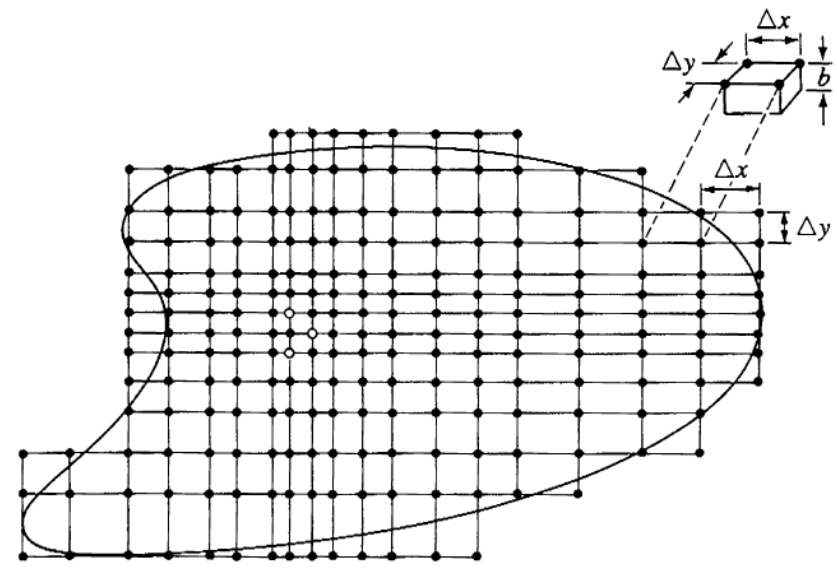
می کنند) برای توسعه معادلات در روش المان محدود ضروری است.

در روش تفاضل (اختلاف) محدود، گره ها ممکن است در داخل سلول ها یا در محل تقاطع خطوط شبکه قرار گیرند. صرف نظر از نمایش گره ها و بلوک ها، معادلات جریان برای هر نقطه گره ای نوشته می شود زیرا ناحیه اطراف یک گره مستقیماً در توسعه معادلات تفاضل محدود در نظر گرفته نمی شود.



○ Source/sink node

گره های بلوک محور: مشخصات آبخوان و بار هیدرولیکی در هر سلول ثابت فرض می شود.



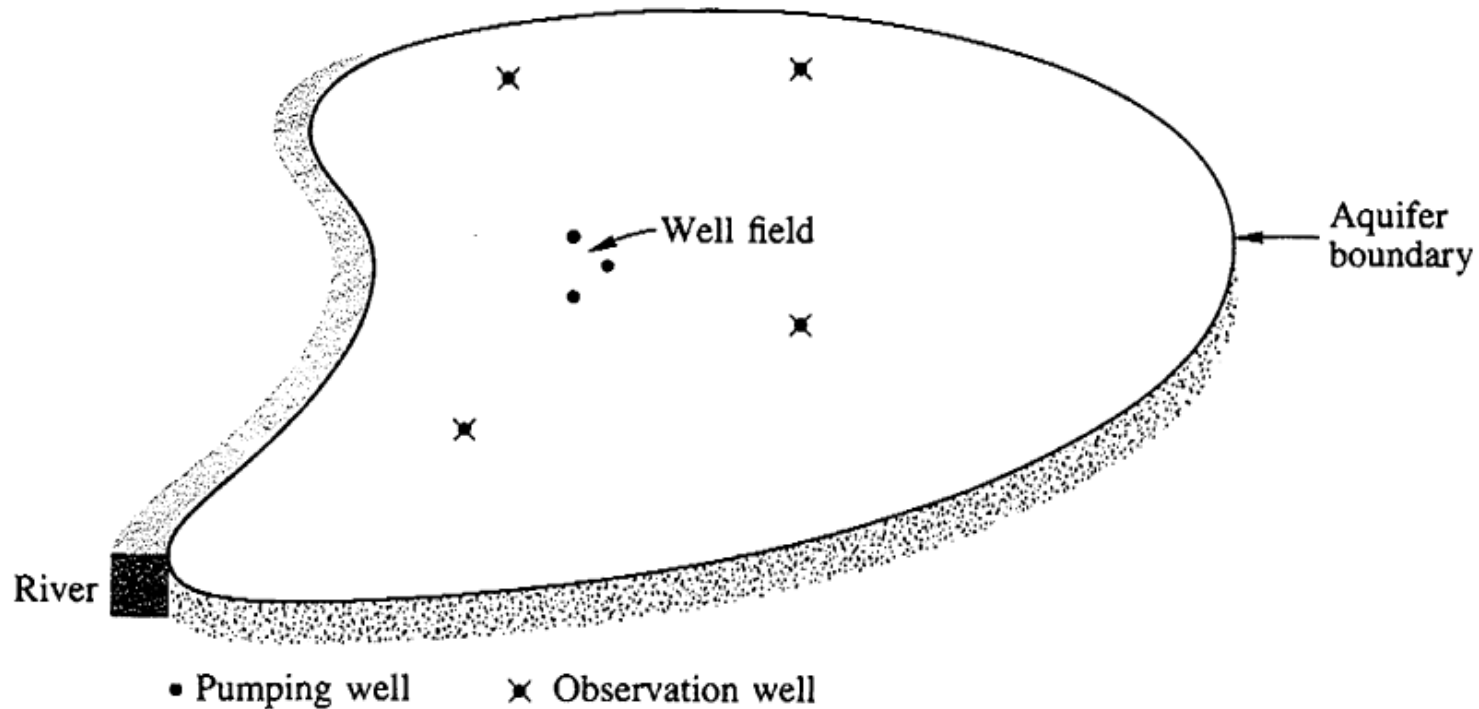
○ Source/sink node

گره های شبکه محور: گره ها در تقاطع خطوط شبکه قرار دارند و ناحیه نفوذ هر گره بر اساس گره های همجوار آن تعریف می شود.

هدف از مدل‌سازی، پیش‌بینی مقدار متغیر مجهول (مثلاً بار هیدرولیکی آب زیرزمینی یا غلظت یک آلاینده) در نقاط گره ای است. مدل‌ها اغلب برای پیش‌بینی اثرات پمپاژ بر تراز سطح آب زیرزمینی استفاده می‌شوند.

به عنوان مثال، آبخوان نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. در این مثال، می‌توان از مدلی برای پیش‌بینی اثرات پمپاژ سه چاه در میدان چاه بر تراز سطح آب زیرزمینی در چهار چاه مشاهده ای یا برای پیش‌بینی اثرات نصب چاه‌های پمپاژ اضافی استفاده کرد.

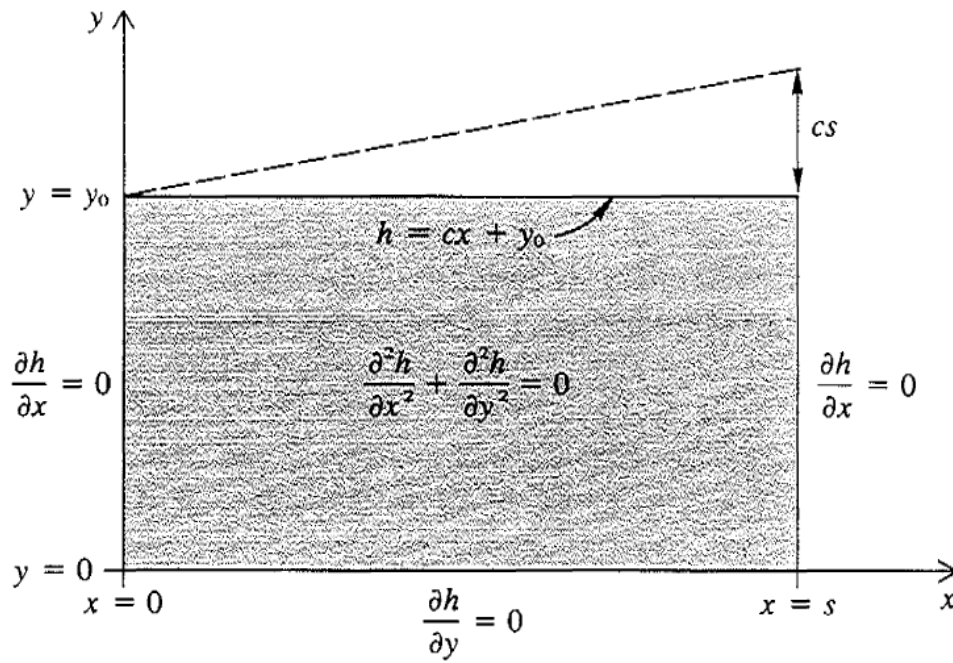
بر اساس این مدل همچنین می‌توان مشخص نمود که به چه میزان آب از رودخانه در نتیجه پمپاژ منحرف می‌شود. با این حال، قبل از انجام یک شبیه‌سازی پیش‌بینی‌کننده، مدل باید کالیبره و تأیید شود.



حل عددی با روش تفاضل محدود تحت شرایط پایدار

یک مدل ریاضی آب زیرزمینی تحت شرایط پایدار شامل یک معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی و شرایط مرزی است که آبخوان را در یک منطقه مشخص شبیه‌سازی می‌کند. برای حل مدل نیاز به محاسبه مقادیر بار هیدرولیکی (h) در هر نقطه از سیستم جریان است. با استفاده از روش های تحلیلی و در نظر گرفتن فرضیات ساده کننده نیز می توان معادله جریان آبخوان را حل نمود و مقدار بار هیدرولیکی را، که تابعی از مکان می باشد، ارائه نمود. به عنوان مثال، در صورتی که آبخوان شکل زیر همگن و همسان باشد، رابطه تحلیلی مرتبط با مقدار بار هیدرولیکی به صورت زیر خواهد بود:

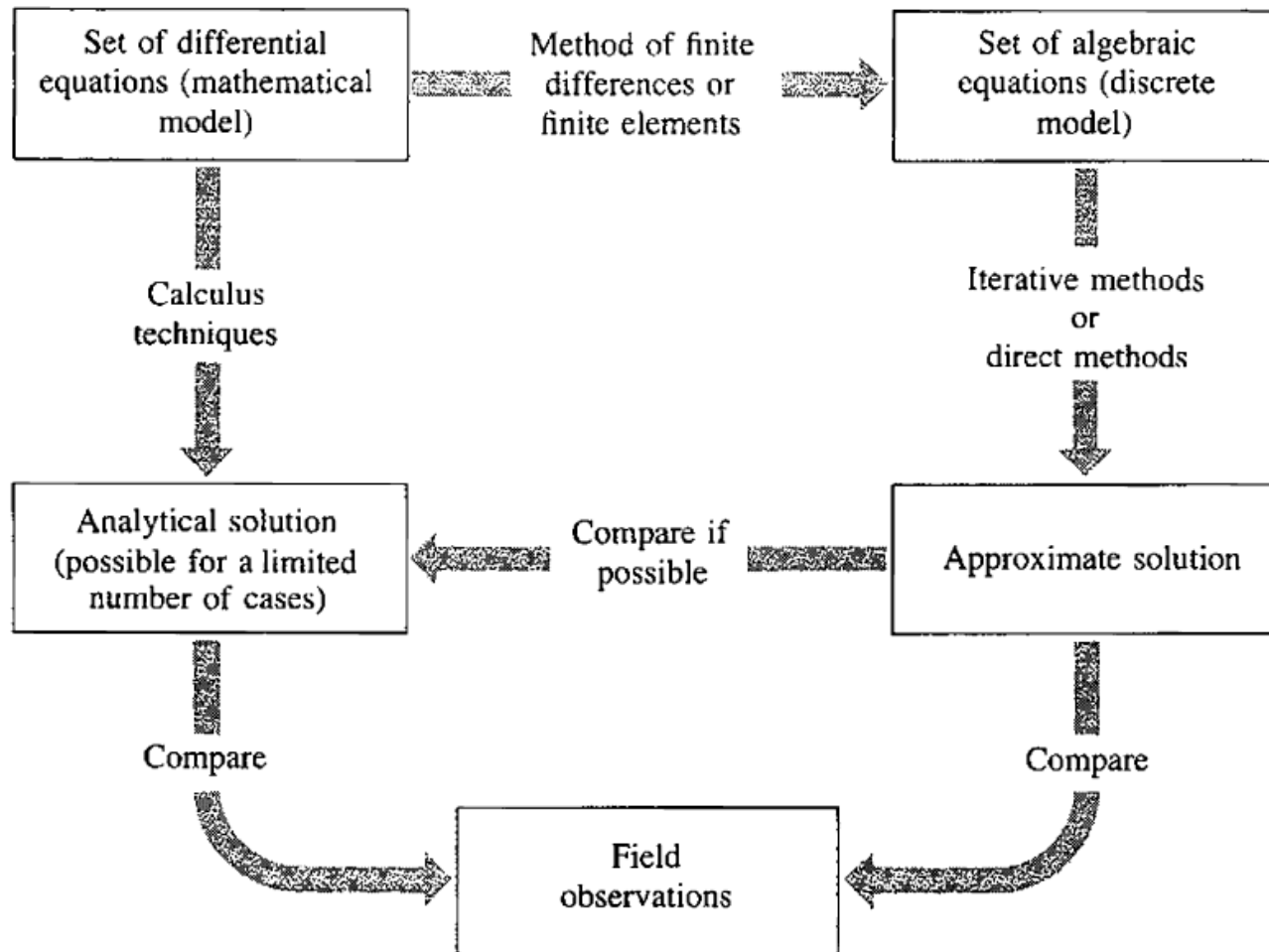
$$h(x, y) = y_0 + \frac{cs}{2} - \frac{4cs}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m+1)\pi x/s] \cosh[(2m+1)\pi y/s]}{(2m+1)^2 \cosh[(2m+1)\pi y_0/s]}$$



راه حل های تحلیلی می توانند برای محاسبه مقادیر مجهول در هر نقطه از حوزه آبخوان استفاده شوند.

نکته: در حل عددی نیازی به هیچ یک از فرضیات ساده کننده نیست.

در روش های عددی تفاضل محدود و اجزای محدود، معادلات دیفرانسیل تشکیل دهنده مدل آب زیرزمینی به مجموعه ای از معادلات جبری تبدیل می شوند. این معادلات جبری را می توان با روش هایی همانند روش تکرار شونده (Iterative techniques) و یا روش ماتریس مستقیم (Direct matrix methods) حل نمود. نتایج حل این روش های عددی (توزیع بار هیدرولیکی تولید شده) را می توان با راه حل های تحلیلی و مقادیر اندازه گیری شده صحرایی مقایسه نمود.



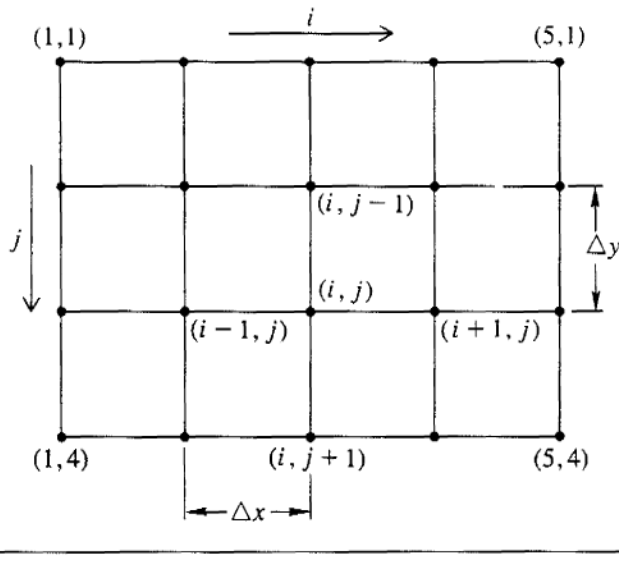
ارائه روابط تفاضل محدود برای معادله لاپلاس آبخوان

راه‌حل‌های عددی تنها برای تعداد محدود و از پیش تعیین‌شده‌ای از نقاط در محدوده آبخوان مورد مطالعه، مقادیری را برای بار هیدرولیکی ارائه می‌دهند. با تبدیل معادله جریان به معادله دیفرانسیل جزئی، مجموعه‌ای از N معادله جبری (برای N نقطه)، که دارای N بار هیدرولیکی مجهول می‌باشند، تشکیل می‌شود که با حل آن‌ها، مقدار بار هیدرولیکی در تمامی نقاط تعیین می‌شود.

تحت شرایط پایدار و محیط همگن و همسان

$$S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

در این بخش، تقریب تفاضل محدود معادله لاپلاس در دو بعد استخراج می‌شود. مجموعه محدودی از نقاط را روی یک شبکه با فاصله منظم در نظر بگیرید. نقاط شبکه به صورت افقی و عمودی دارای فواصل به ترتیب Δx و Δy می‌باشند.



فواصل Δx و Δy واحدهای طبیعی شبکه هستند. هر چه این فواصل کوچک‌تر باشند، تعداد مجهولات افزایش و جواب تقریبی به حل تحلیلی نزدیک‌تر می‌شود. هر نقطه در شبکه، با یک جفت مرتب شده اعداد صحیح (i, j) مشخص می‌شود. مقدار بار هیدرولیکی در این نقطه با $h(i, j)$ یا $h_{i,j}$ نمایش داده می‌شود.

در تقریب تفاضل محدود، مشتقات با تفاوت های گرفته شده بین نقاط گره ای جایگزین می شوند. بر اساس تقریب مرکزی

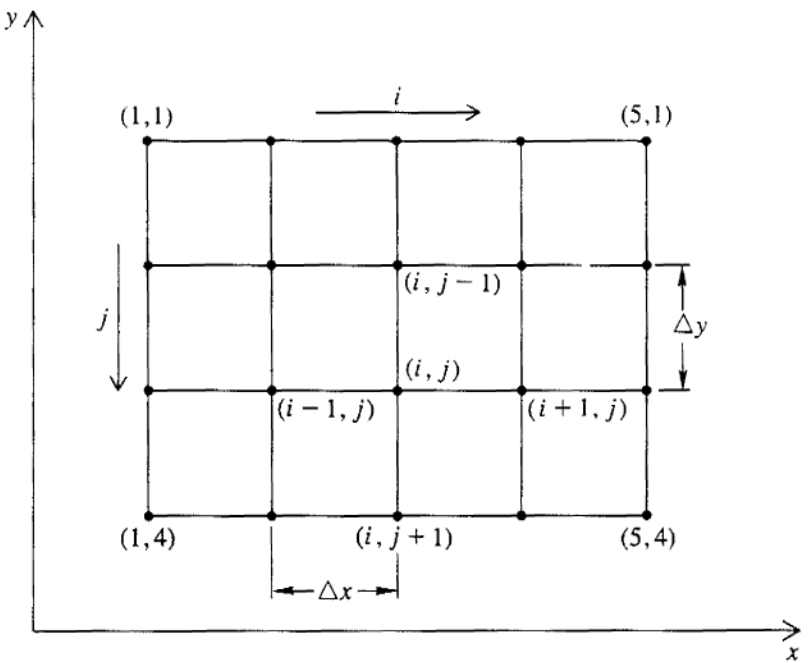
(Central approximation) می توان $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ را در هر نقطه (i, j) بر اساس تقریب مشتق اول آن در نقاط $(i + 1, j)$ و

$(i - 1, j)$ بدست آورد:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \simeq \frac{\frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} - \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \simeq \frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + h_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \simeq \frac{h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + h_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

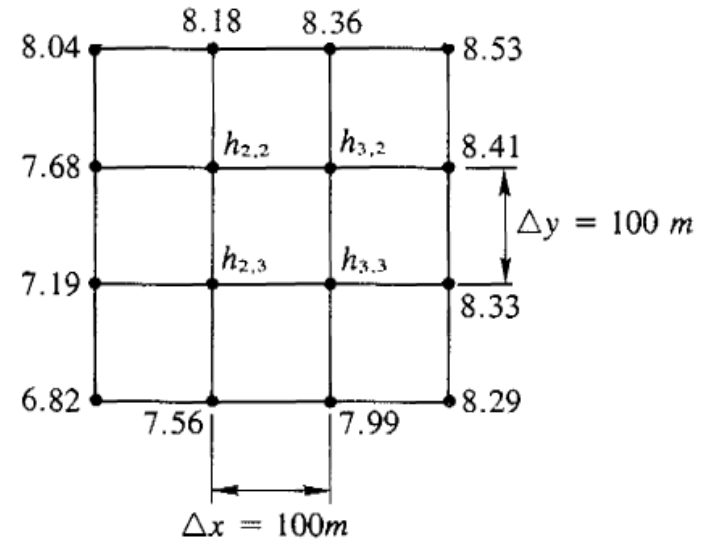
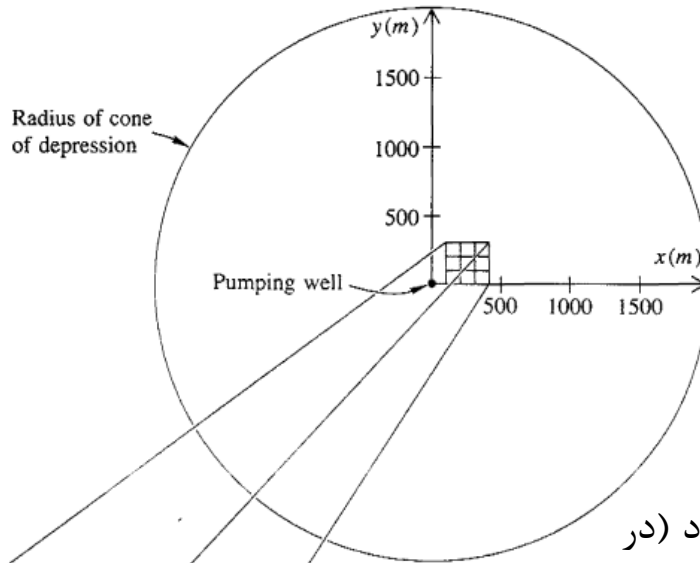
$\Delta x = \Delta y$ با فرض مربع در نظر گرفتن شبکه تعریف شده



$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j} = 0$$

این معادله برای هر نقطه (i, j) از شبکه تعریف شده ارائه می شود و پرکاربردترین معادله در راه حل های تفاضل محدود مسائل جریان حالت پایدار است.

مثال) آبخوانی با شرایط مرزی **Dirichlet** (مرز با بار هیدرولیکی مشخص) که در آن یک چاه پمپاژ قرار دارد مدنظر است. ابعاد حوزه مورد بررسی به صورت $100 \leq x \leq 400$ و $0 \leq y \leq 300$ می باشد. فرض کنید در مرزها، مقدار بار هیدرولیکی بر مبنای اندازه گیری در چاه های مشاهده ای مشخص می باشد. هدف، تعیین مقدار بار هیدرولیکی در نقاط داخل مرز است.



رابطه زیر برای هر یک از چهار نقطه داخل آبخوان ارائه می گردد (در عبارات زیر خط دار، مقدار بار هیدرولیکی مشخص است):

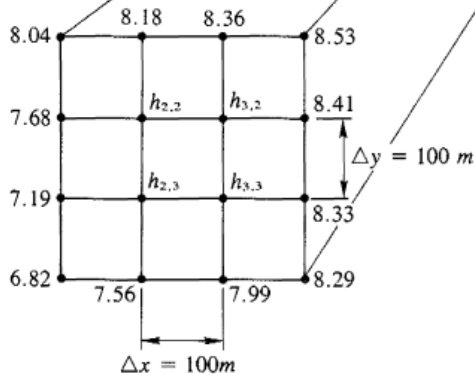
$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j} = 0$$

$$\text{At } i = 2, j = 2: \underline{h_{1,2}} + h_{3,2} + \underline{h_{2,1}} + h_{2,3} - 4h_{2,2} = 0$$

$$\text{At } i = 2, j = 3: \underline{h_{1,3}} + h_{3,3} + h_{2,2} + \underline{h_{2,4}} - 4h_{2,3} = 0$$

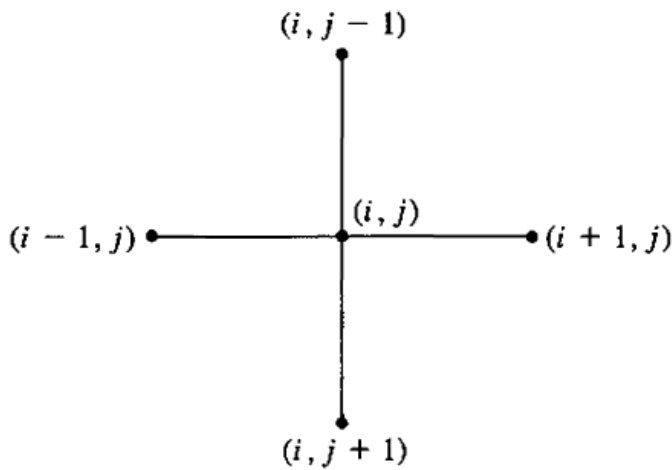
$$\text{At } i = 3, j = 2: h_{2,2} + \underline{h_{4,2}} + \underline{h_{3,1}} + h_{3,3} - 4h_{3,2} = 0$$

$$\text{At } i = 3, j = 3: h_{2,3} + \underline{h_{4,3}} + h_{3,2} + \underline{h_{3,4}} - 4h_{3,3} = 0$$



با توجه به چهار رابطه و چهار مجهول، می توان بار هیدرولیکی را در نقاط مجهول تعیین نمود. راه حل تحلیلی این مسئله به صورت زیر است که از آن می توان جهت بررسی پاسخ های بدست آمده از روش عددی استفاده نمود.

$$h(x, y) - 10 = 1.06 \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2000}\right)$$



$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - 4h_{i,j} = 0$$



$$h_{i,j} = \frac{h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1}}{4}$$

در واقع جهت تعیین بار هیدرولیکی در نقطه (i, j) لازم است مقدار متوسط بار هیدرولیکی محاسبه شده از چهار نزدیکترین همسایه آن مدنظر قرار گیرد. این معادله، اغلب عملگر پنج نقطه ای (Five-point operator) نامیده می شود زیرا معادلات جبری که معادله لاپلاس را تقریب می زند یکی پس از دیگری با حرکت دادن ستاره پنج نقطه ای شکل فوق در سراسر حوزه آبخوان ایجاد می شوند.

در مسائلی که تعداد گره های مورد بررسی زیاد می باشد، استفاده از حل همزمان معادلات جبری دشوار است. برای این منظور لازم است از روش های حل تکرار شونده که مبتنی بر حدس زدن و تنظیم می باشد، استفاده شود.

در این بخش سه روش از مجموعه روش های تکرار شونده حل معادلات بدست آمده از مشتقات جزئی بررسی می شود که عبارتند از:

۱- روش Jacobi

۲- روش Gauss-seidel

۳- روش Successive Over Relaxation (SOR)

از بین این روش ها، روش تکرار ژاکوبی کمترین کارایی را دارد و به ندرت استفاده می شود. روش تکرار گاوس-سایدل را می توان برای حالت های خاص استفاده نمود. اما روش SOR به طور کلی برای حل مسائل آب های زیرزمینی از کارآیی بالاتری برخوردار است.

۱- روش Jacobi

در این روش ابتدا در تکرار اول برای گره های مجهول، مقادیری را با توجه به بار هیدرولیکی اطراف آن فرض می کنیم. سپس با استفاده از رابطه زیر، مقدار بارهای هیدرولیکی در تکرار m م بدست می آید:

$$h_{i,j}^{m+1} = \frac{h_{i-1,j}^m + h_{i+1,j}^m + h_{i,j-1}^m + h_{i,j+1}^m}{4}$$

مقدار بار هیدرولیکی در تکرار m م و در سلول $(i,j + 1)$

روند محاسبات تا زمانی ادامه می یابد که اختلاف بین مقادیر بارهای هیدرولیکی محاسبه شده در دو تکرار متوالی از مقدار خطای تعریف شده کمتر باشد.

مقادیر اولیه فرض شده برای گره های مجهول:

$$\forall m = 1 \Rightarrow \begin{cases} h_{2,2}^1 = 8 \text{ m} \\ h_{3,2}^1 = 8.5 \text{ m} \\ h_{2,3}^1 = 7 \text{ m} \\ h_{3,3}^1 = 8 \text{ m} \end{cases}$$

با استفاده از رابطه زیر، مقدار بار هیدرولیکی در تکرار دوم محاسبه می شود:

$$h_{i,j}^{m+1} = \frac{h_{i-1,j}^m + h_{i+1,j}^m + h_{i,j-1}^m + h_{i,j+1}^m}{4}$$

این روند تا زمانی ادامه می یابد که اختلاف بین مقادیر بارهای هیدرولیکی محاسبه شده در دو تکرار متوالی ناچیز شود.

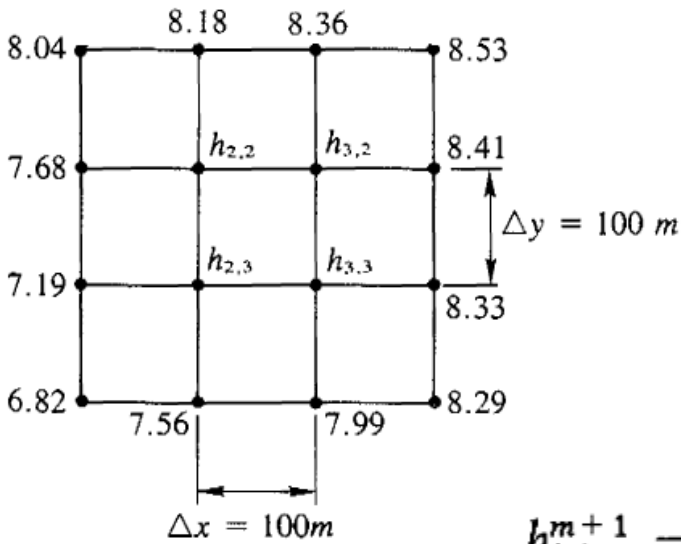
۲- روش Gauss-seidel

در این روش، جهت تعیین مقدار بار هیدرولیکی هر گره مشابه روش ژاکوبی عمل می شود یا این تفاوت که در هر تکرار از چهار گره همجوار، مقادیر دو گره حدس زده شده و مقدار دو گره دیگر بر اساس مقدار محاسبه شده از تکرار قبلی مورد استفاده قرار می گیرد. بر این اساس رابطه این روش به صورت زیر خواهد بود:

$$h_{i,j}^{m+1} = \frac{\overbrace{h_{i-1,j}^{m+1} + h_{i,j-1}^{m+1}} + \overbrace{h_{i+1,j}^m + h_{i,j+1}^m}}{4}$$

مقدار بار هیدرولیکی محاسبه شده در تکرار m ام

مقدار بار هیدرولیکی فرض شده




$$\forall m = 2 \Rightarrow \begin{cases} h_{2,2}^1 = 7.84 \text{ m} \\ h_{3,2}^1 = 8.19 \text{ m} \\ h_{2,3}^1 = 7.69 \text{ m} \\ h_{3,3}^1 = 7.96 \text{ m} \end{cases}$$

از آنجا که این روش، از مقادیر جدید محاسبه شده در تکرار قبلی استفاده می نماید لذا نسبت به روش Jacobi کارآمدتر است.

۳- روش Successive Over Relaxation (SOR)

در این روش ابتدا مقدار تغییر بین بار هیدرولیکی محاسبه شده توسط روش گاوس-سایدل در دو تکرار متوالی، که C نامیده می شود، برآورد می گردد. سپس با ضرب نمودن آن در فاکتور relaxation ($\omega \geq 1$)، مقدار بار هیدرولیکی در هر تکرار بر اساس رابطه زیر بروز می شود:

$$C = h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j}^m$$

$$h_{i,j}^{m+1} = (1 - \omega)h_{i,j}^m + \omega \frac{h_{i-1,j}^{m+1} + h_{i,j-1}^{m+1} + h_{i+1,j}^m + h_{i,j+1}^m}{4}$$
$$h_{i,j}^{m+1} = h_{i,j}^m + \omega C$$

میزان خطای کمتری در هر تکرار در محاسبه مقدار بار هیدرولیکی جدید لحاظ شده است (Under relaxation). \Rightarrow if $0 < \omega < 1$

روش SOR به روش Gauss-seidel تبدیل می شود. \Rightarrow if $\omega = 1$

میزان خطای بیشتری در هر تکرار در محاسبه مقدار بار هیدرولیکی جدید لحاظ شده است (Over relaxation). \Rightarrow if $\omega > 1$

روش‌هایی برای انتخاب بهترین مقدار ω برای مسائل مختلف وجود دارد، اما به دلیل پیچیدگی روش، یافتن بهینه ω با آزمون و خطا آسان‌تر است. به طور کلی $1 \leq \omega \leq 2$ است. همانطور که در رابطه فوق نیز مشاهده می شود، در صورتی که $0 < \omega < 1$ باشد، مقدار جدید بار هیدرولیکی در واقع بیانگر میانگین وزنی بار هیدرولیکی در دو تکرار متوالی را نشان می دهد. به عبارت دیگر مقدار جدید بین دو مقدار حدس قبلی و حدس جدید قرار می گیرد.

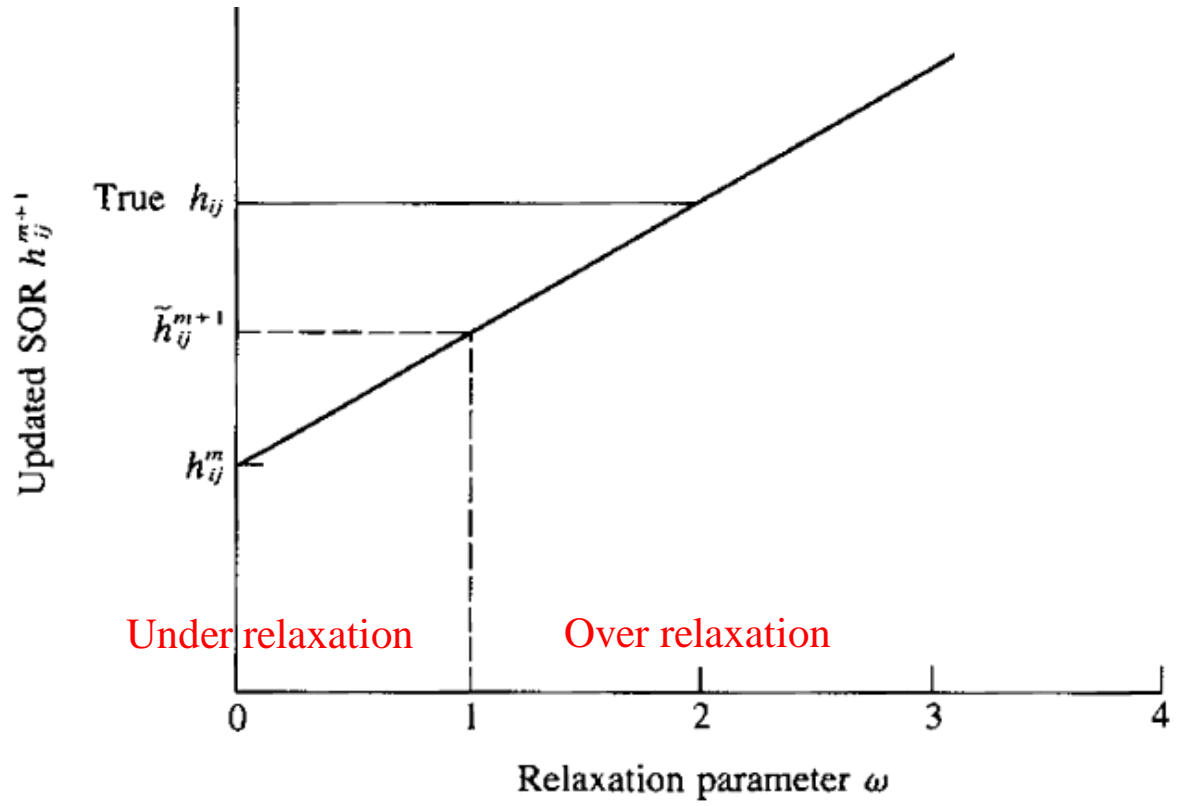
در صورتی که $\omega > 1$ باشد، ممکن است مقدار بار هیدرولیکی محاسبه شده از مقدار صحیح خود بیشتر شود و در واقع از جواب اصلی عبور نماید. به همین دلیل است که مقادیر ω بین ۱ و ۲ تمایل به بهینه بودن دارند. در صورتی که روابط روش SOR به صورت زیر ارائه شود، با ترسیم مقدار ω در برابر مقدار بار هیدرولیکی محاسبه شده می تواند دید بهتری از اثر پارامتر ω بر وضعیت همگرایی این روش را نشان دهد.

$$\tilde{h}_{i,j}^{m+1} = \frac{h_{i-1,j}^{m+1} + h_{i,j-1}^{m+1} + h_{i+1,j}^m + h_{i,j+1}^m}{4}$$



$$h_{i,j}^{m+1} = h_{i,j}^m + (\tilde{h}_{i,j}^{m+1} - h_{i,j}^m)\omega$$

$$h_{i,j}^{m+1} = (1 - \omega)h_{i,j}^m + \omega\tilde{h}_{i,j}^{m+1}$$



مثال)

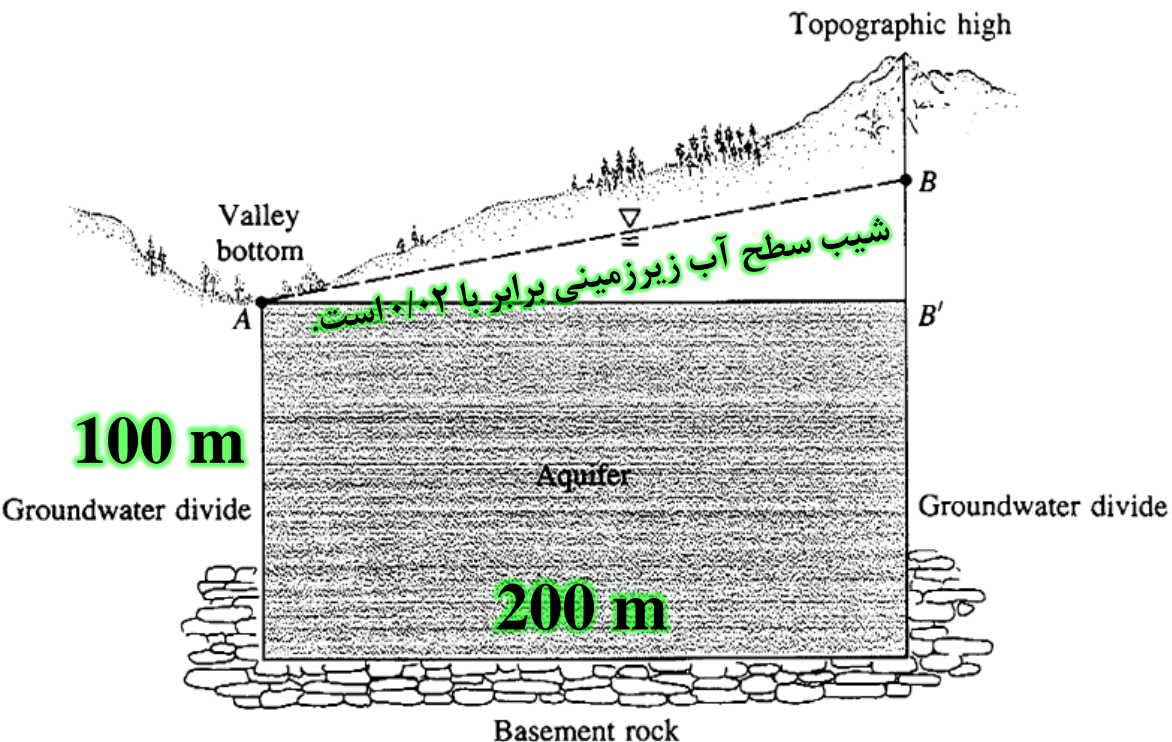
شکل زیر یک مقطع از یک حوضه کوچک را نشان می دهد که از یک طرف توسط توپوگرافی مرتفع محدود شده است، که بیانگر خط تقسیم آب زیرزمینی منطقه ای است، و از طرف دیگر توسط یک رودخانه اصلی، که به عنوان منطقه ای جهت تخلیه آب زیرزمینی است، احاطه گردیده است. آبخوان از مواد همگن، همسان تشکیل شده است و مواد متخلخل زیرین تشکیل دهنده سنگ نفوذ ناپذیر بستر می باشند.

برای حل عددی این آبخوان، ابتدا لازم است شرایط مرزی آبخوان تعیین شود:

تقسیمات چپ و راست آبخوان از نظر ریاضی به صورت مرزهای غیرقابل نفوذ و بدون جریان می باشد. اگرچه هیچ مانع فیزیکی وجود ندارد، اما با توجه به اینکه خط تقسیم آب زیرزمینی است، لذا اثر یک مانع نفوذ ناپذیر را دارد و هیچ آب زیرزمینی از آن عبور نمی کند.

آبهای زیرزمینی از سمت راست به پایین دره در نقطه A تخلیه می شوند.

مرز پایینی نیز یک مرز بدون جریان است زیرا سنگ زیرین نفوذناپذیر یک مانع فیزیکی برای جریان ایجاد می کند.

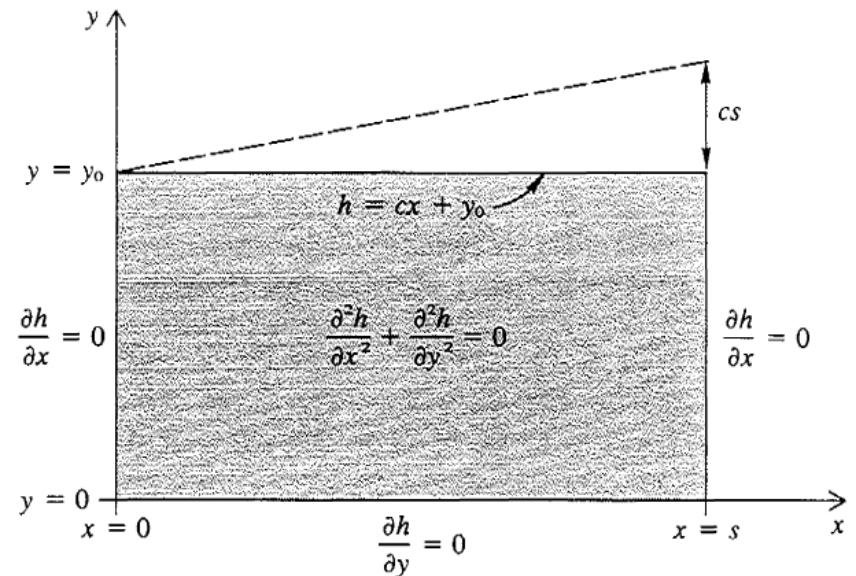
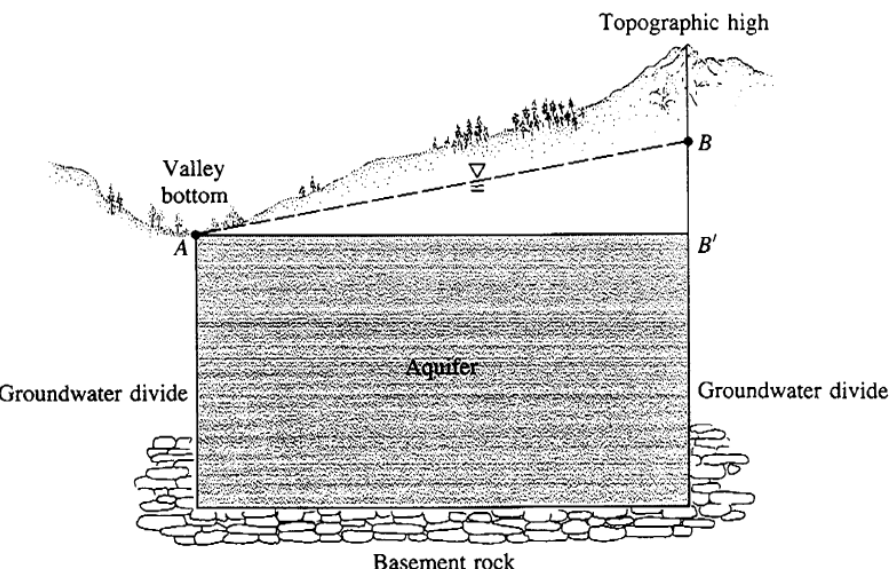


- مرز بالایی مدل ریاضی این آبخوان خط افقی AB' است. بنابراین منطقه مورد مدلسازی، یک سطح مستطیلی است که تقریبی از شکل واقعی منطقه جریان اشباع شده است. در امتداد مرز AB' ، بار هیدرولیکی برابر با ارتفاع سطح ایستابی است و به صورت یک خط مستقیم در نظر گرفته می شود.

در این بخش، شرایط مرزی مشخص شده، به صورت ریاضی بیان می شود. برای هر مرز یک معادله لازم است. بر اساس سیستم مختصات تعریف شده در شکل زیر، ابتدا مرز بالایی را در نظر بگیرید ($y = y_0, 0 \leq x \leq s$). توزیع بار هیدرولیکی در امتداد این مرز به صورت خطی در نظر گرفته شده است. با توجه به مشخص بودن بار هیدرولیکی در این مرز، شرایط مرزی از نوع **Dirichlet** است.

$$\begin{cases} h(0, y_0) = y_0, & x = 0 \\ h(x, y_0) = cx + y_0, & 0 \leq x \leq s \end{cases}$$

شیب سطح آب زیرزمینی



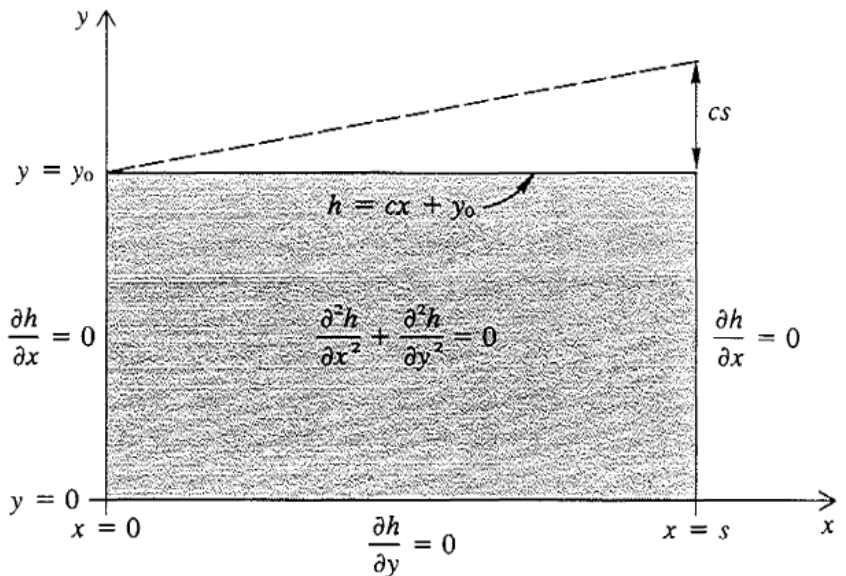
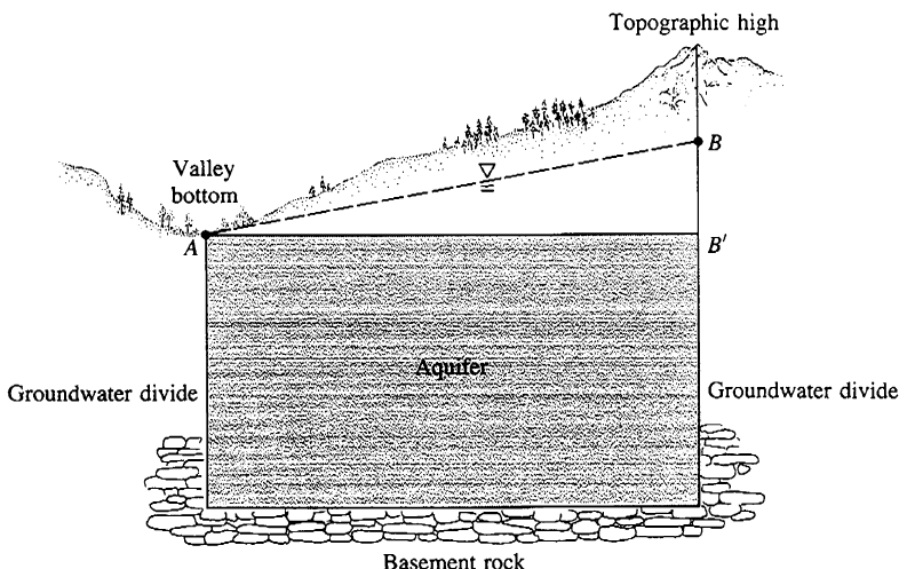
در سه مرز دیگر، شرایط مرزی بدون جریان (Neumann Boundary) حاکم است. در این مرزها، قانون دارسی جریان با گرادیان هیدرولیکی مرتبط است. در امتداد مرز چپ و مرز پایین، جریان عبوری برابر با صفر است، لذا

$$q_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad , \quad q_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

در این مثال، دو نوع شرایط مرزی تعریف شده است. مجموعه کامل شرایط مرزی به صورت زیر قابل ارائه است:

$h(x, y_0) = cx + y_0$	$, 0 \leq x \leq s$	مرز بالا
$\frac{\partial h}{\partial y} = 0$	$, 0 \leq x \leq s$	مرز پایین
$\frac{\partial h}{\partial x} = 0$	$, 0 \leq y \leq y_0$	مرز راست
$\frac{\partial h}{\partial x} = 0$	$, 0 \leq y \leq y_0$	مرز چپ

مطابق اطلاعات اولیه داده شده در صورت مسأله:
 $c = 0.02$, $s = 200 m$, $y_0 = 100m$



با توجه به اینکه آبخوان همگن و همسان است و شرایط جریان پایدار در آبخوان حاکم می باشد، لذا معادله حاکم بر این آبخوان

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

همان رابطه لاپلاس جریان آب زیرزمینی است:

جهت حل عددی این آبخوان تحت شرایط مرزی داده شده، لازم است ابتدا محدوده آبخوان به شبکه های مربعی با اندازه ۲۰ متر تقسیم شود ($\Delta x = \Delta y = 20 \text{ m}$). در حل عددی لازم است مشتقات اول و دوم بار هیدرولیکی با تفاضلات محدود معادل آن

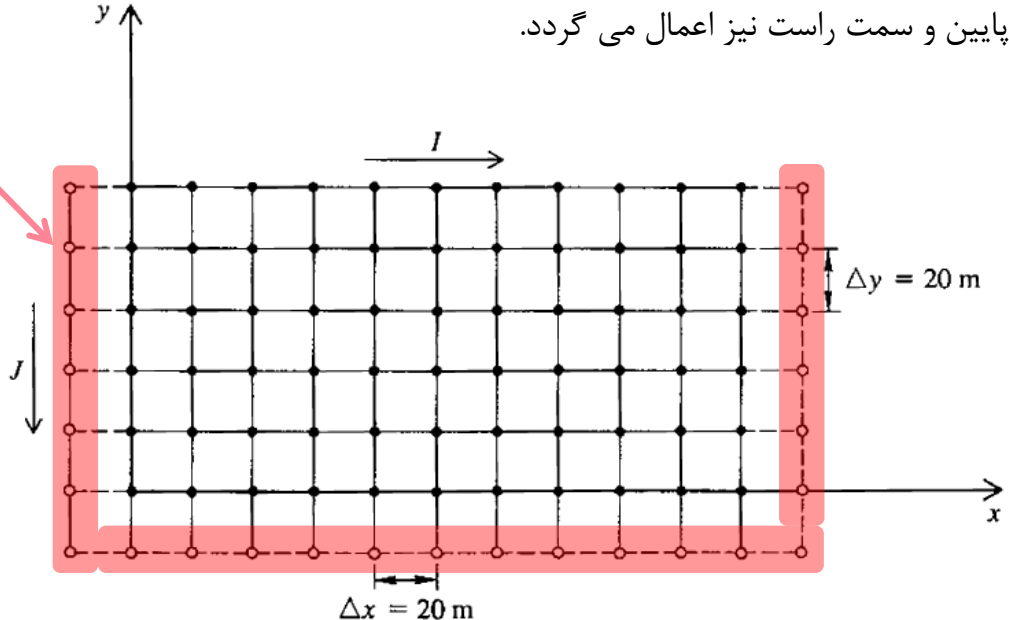
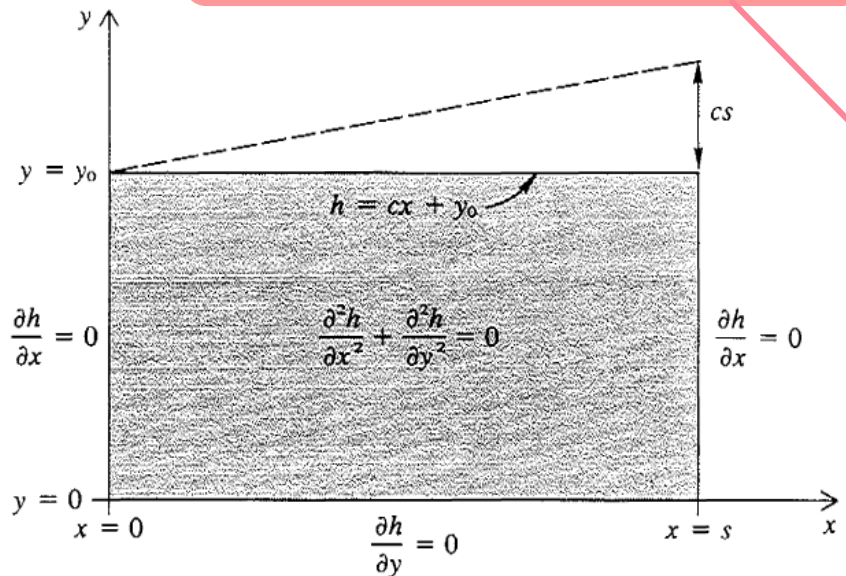
جایگزین شود. به عنوان مثال در مرز چپ که $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ می باشد، تقریب تفاضل محدود آن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

برای مرز سمت چپ، جهت محاسبه بار هیدرولیکی در مرز، لازم است مقدار

$h(i-1, j)$ مشخص باشد که در خارج از مرز قرار دارد. لذا با قرار دادن ستونی از گره های به اصطلاح خیالی یا ساختگی، دامنه مسئله اختلاف محدود با یک ستون اضافی به سمت چپ گسترش داده می شود. این روند برای مرزهای پایین و سمت راست نیز اعمال می گردد.

گره های خیالی یا ساختگی
(Imaginary or fictitious nodes)



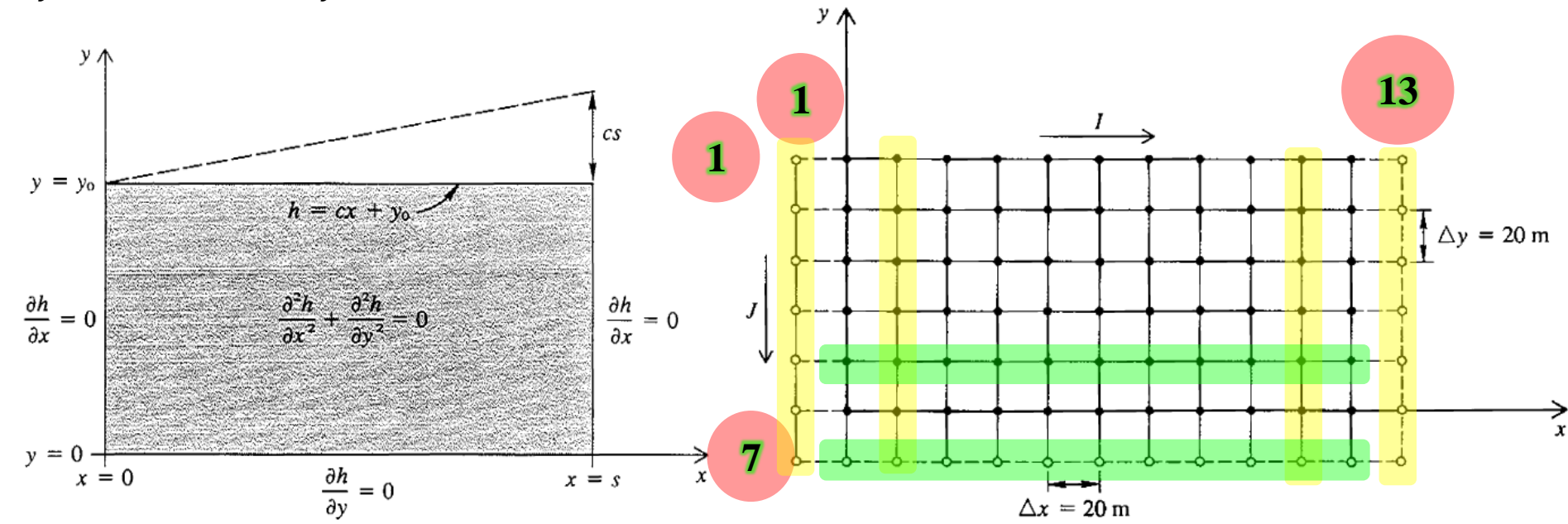
$$\left\{ \begin{array}{ll} h(x, y_0) = 0.02x + 100 & , 0 \leq x \leq 200 \quad \text{مرز بالا} \\ \frac{\partial h}{\partial y} = 0 & , 0 \leq x \leq 200 \quad \text{مرز پایین} \\ \frac{\partial h}{\partial x} = 0 & , 0 \leq y \leq 100 \quad \text{مرز راست} \\ \frac{\partial h}{\partial x} = 0 & , 0 \leq y \leq 100 \quad \text{مرز چپ} \end{array} \right.$$

برای مرزهای راست و چپ:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow h_{i+1,j} = h_{i-1,j} \Rightarrow \begin{cases} h_{3,j} = h_{1,j} \\ h_{13,j} = h_{11,j} \end{cases} , \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq 6 \\ 1 \leq j \leq 6 \end{matrix}$$

برای مرز پایین:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta y} = 0 \Rightarrow h_{i,j+1} = h_{i,j-1} \Rightarrow h_{i,5} = h_{i,7} , \quad 2 \leq i \leq 12$$



حل عددی با روش تفاضل محدود تحت شرایط پایدار (معادله پواسون)

جهت در نظر گرفتن منابع تغذیه و تخلیه به آبخوان تحت شرایط پایدار (همانند تغذیه ناشی از بارندگی، تخلیه توسط چاه ها و نشت از طریق سد)، بجای استفاده از رابطه لاپلاس از معادله پواسون استفاده می شود.

معادله پواسون

تغذیه از بارش و تخلیه از یک چاه به ترتیب نمونه هایی از منابع تغذیه (Source) و تخلیه (Sink) نقطه ای در آب زیرزمینی به شمار می آیند. در این حالت نمی توان جهت بررسی رفتار آبخوان از معادله لاپلاس استفاده نمود. جهت استخراج رابطه پواسون، آبخوان افقی دو بعدی با ضخامت یکنواخت b در نظر گرفته می شود. بر اساس یک المان حجمی واقع در آبخوان و با استفاده از تحلیل پیوستگی، می توان تحت شرایط پایدار رابطه زیر را ارائه نمود:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x (b \Delta y) + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y (b \Delta x) = R(x, y) \Delta x \Delta y$$

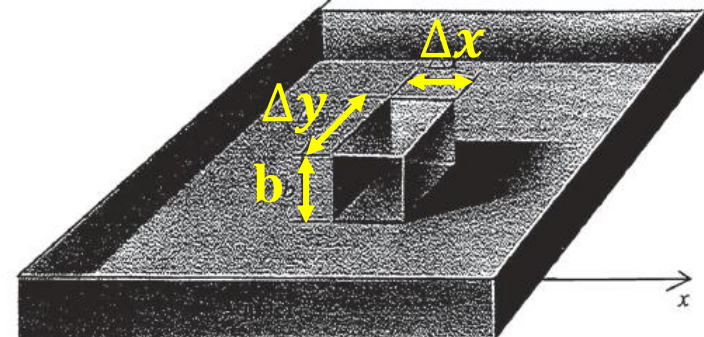
حجم آب اضافه شده در واحد زمان در واحد سطح آبخوان

با جایگزینی q_x و q_y بر اساس قانون دارسی، تعریف $T = Kb$ و تقسیم طرفین رابطه فوق بر $T \Delta x \Delta y$ ، معادله پواسون به صورت

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{R(x, y)}{T}$$

زیر بدست می آید:

اگر $R(x, y)$ در همه جای حوزه مسئله برابر با صفر باشد، معادله پواسون به معادله لاپلاس تبدیل می شود. این عبارت برای شبیه سازی منابع نقطه ای و توزیعی تغذیه (با مقادیر مثبت) و تخلیه (با مقادیر منفی) استفاده می شود و دارای واحد طول در واحد زمان است.



تغذیه جزیره ای (Island Recharge)

بر اساس رابطه پواسون، در صورتی که مقدار R ثابت در نظر گرفته شود، تحت شرایط جریان یک بعدی، Jacob برای شبیه سازی

جریان آب زیرزمینی در زیر یک جزیره طویل، رابطه پواسون را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{R}{T}$$

ژاکوب از این معادله برای شبیه سازی یک آبخوان آزاد با ضخامت واقعی اشباع شده $h + b$ استفاده می کند. در این رابطه

$b \gg h$ فرض می شود. همچنین در این مدل فرض می شود که سطح آب زیرزمینی، سطح دریا را در لبه های جزیره قطع می کند

و نیمرخ سطح آب در سراسر جزیره متقارن است. بنابراین، لازم است فقط نیمی از حوزه مسئله در نظر گرفته شود ($0 \leq x \leq l$)

یا ($-l \leq x \leq 0$). در صورتی که سمت راست حوزه مسئله مدنظر قرار گیرد، شرایط مرزی به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{cases} \text{in } x = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \text{in } x = l \Rightarrow h = 0 \end{cases}$$

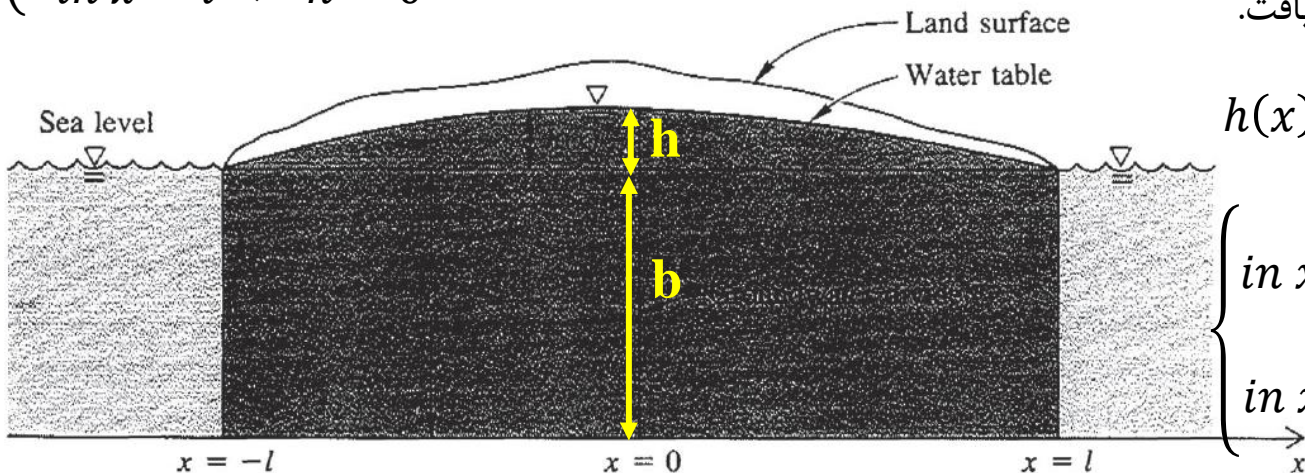
با دوبار انتگرال گیری از رابطه $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{R}{T}$ و اعمال شرایط مرزی فوق،

می توان به حل تحلیلی این مدل دست یافت.

$$h(x) = -\frac{R}{T} \frac{x^2}{2} + a_1 x + a_2$$

$$\text{in } x = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\text{in } x = l \Rightarrow h = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{R l^2}{T 2}$$

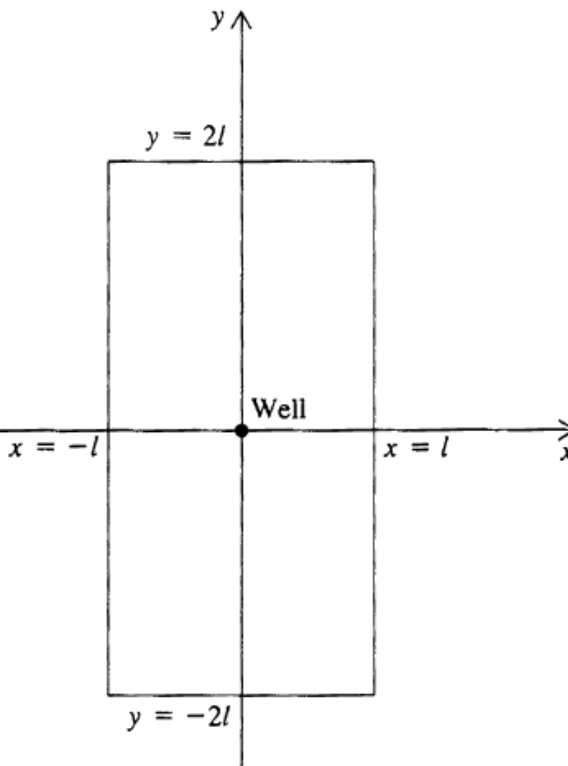


$$h(x) = -\frac{R}{2T}(l^2 - x^2)$$

حل عددی تغذیه جزیره ای با استفاده از مدل دو بعدی پواسون

در صورتی که طول جزیره دو برابر عرض آن در نظر گرفته شود (شکل زیر) و ضریب انتقال آبخوان، T ، و تراز سطح آب در چاه مرکز جزیره مشخص باشد، هدف تعیین نرخ تغذیه آبخوان (R) در مرکز جزیره است. لازم به ذکر است این نرخ تغذیه به طور مستقیم در شرایط صحرایی قابل اندازه گیری نیست. جهت تخمین نرخ تغذیه، از یک مدل ریاضی بر اساس معادله پواسون و با استفاده از تراز سطح آب اندازه گیری شده در نقطه ای واقع در مرکز جزیره می توان بهره برد. در استفاده از معادله پواسون فرض بر این است که ضخامت آبخوان بسیار بزرگتر از اختلاف تراز سطح آب زیرزمینی نسبت به سطح دریا ($h \gg b$) است.

جهت حل عددی این مسئله، شرایط مرزی را می توان به دو روش در نظر گرفت:



۱- ساده ترین روش، که نیازمند حافظه بالای کامپیوتری است، این است که کل جزیره را به عنوان محدوده مسئله در نظر گرفته شود و مقدار بار هیدرولیکی در تمامی مرزها برابر با صفر لحاظ گردد.

۲- استفاده از شرایط مرزی بدون جریان در امتداد خطوط تقارن است (محورهای x و y) به طوری که تنها یک چهارم جزیره مورد مدلسازی قرار گیرد.

با جایگزین نمودن تقریبات تفاضل محدود در مشتقات جزئی رابطه مقابل، معادله پواسون

به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{R(x, y)}{T}$$

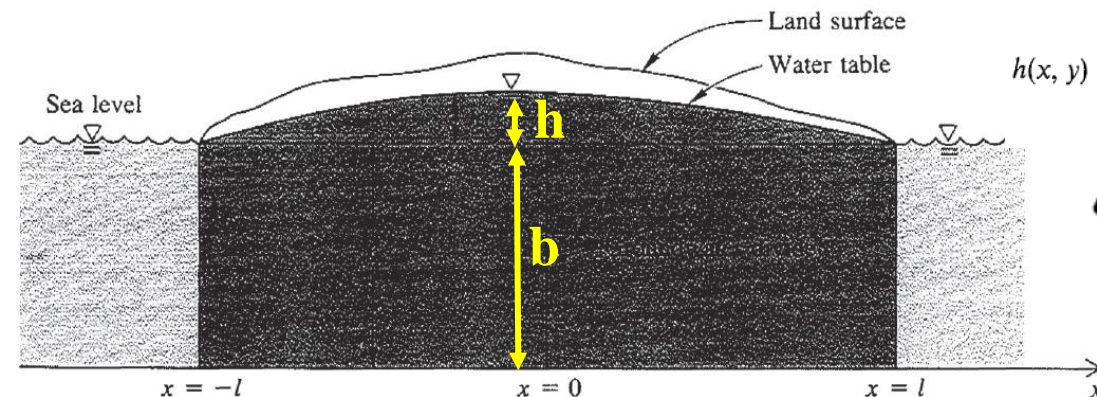
$$\frac{h_{i-1,j} - 2h_{i,j} + 2h_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j-1} - 2h_{i,j} + 2h_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = -\frac{R}{T}$$



با استفاده از روش تکراری گوس-سایدل

$$h_{i,j} = \frac{h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} + \Delta x \times \Delta y \times R/T}{4}$$

مثال آبخوان جزیره ای با $T = 10000 \text{ ft}^2/\text{day}$ و $l = 12000 \text{ ft}$ مطابق شکل زیر مدنظر است. در صورتی که تراز سطح آب در مرکز جزیره برابر با ۲۰ فوت باشد ($h = 20 \text{ ft}$)، توزیع بار هیدرولیکی در سراسر جزیره و مقدار نرخ تغذیه از سطح (R) را محاسبه نمایید. جواب های بدست آمده را با حل تحلیلی این مسئله که به صورت زیر می باشد، مقایسه نمایید.



$$h(x, y) = \frac{R(a^2 - x^2)}{2T} - \frac{16Ra^2}{T\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2a} \cosh \frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{(2n+1)^3 \cosh \frac{(2n+1)\pi b}{2a}}$$

$$a = l \text{ and } b = 2l.$$

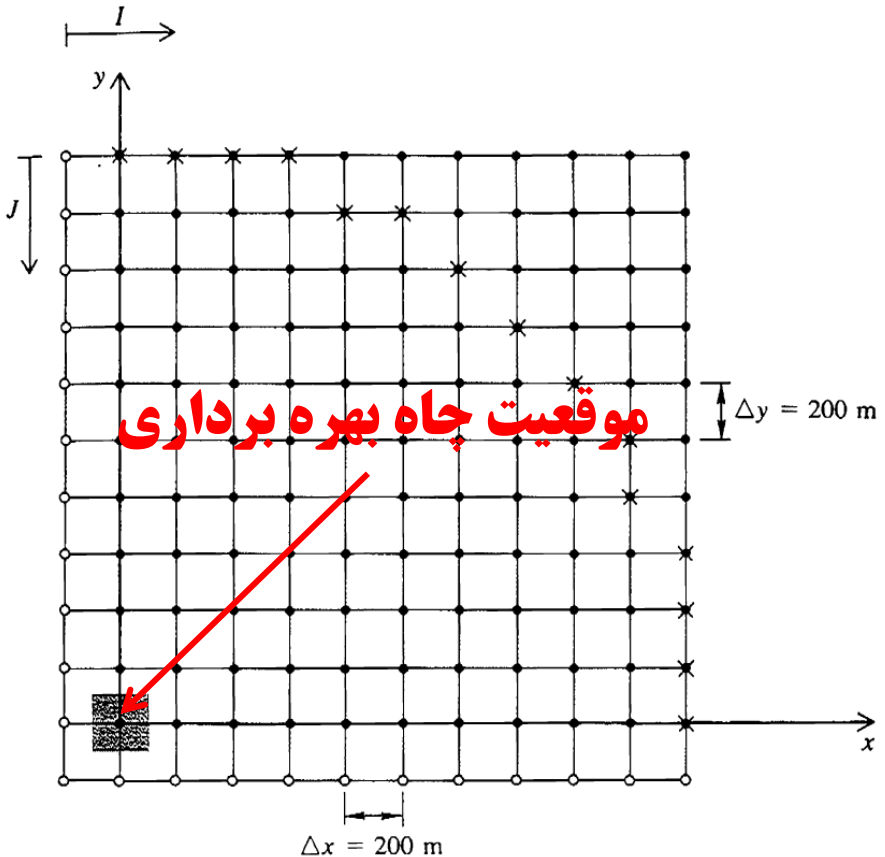
جهت حل با استفاده از گوس سایدل لازم است نرخ تغذیه R حدس زده شود. برای این منظور استفاده از معادله یک بعدی این

مسئله $(h(x) = -\frac{R}{2T}(l^2 - x^2))$ می توانید حدس بهتری را ارائه نمایید.

$$h(x) = -\frac{R}{2T}(l^2 - x^2) \Rightarrow 20 \text{ ft} = -\frac{R}{2 \times 10000}(12000^2 - 0^2) \Rightarrow R = 0.0028 \text{ m/day}$$

با این حدس اولیه می توان مقدار تراز سطح آب زیرزمینی را در مرکز جزیره تعیین نمود و سپس آن را با مقدار ۲۰ فوت اندازه گیری شده مقایسه نمود. این روند تا دستیابی به همگرایی به رسیدن به مقدار تراز ۲۰ فوت در مرکز جزیره ادامه می یابد.

تخلیه توسط چاه در آبخوان محصور



منابع تخلیه و تغذیه به صورت ریاضی در معادله پواسون با تابع $R(x,y)$ نشان داده می شوند. در این بخش جهت توصیف تخلیه چاهی که به طور کامل در یک آبخوان افقی و همسان با ضخامت b نفوذ کرده است، از معادله پواسون استفاده می شود. با فرض اینکه چاه در تمام ضخامت آبخوان نفوذ کرده است، جریان افقی و دو بعدی خواهد بود. از آنجایی که چاه در یک نقطه (x_0, y_0) قرار دارد، به عنوان یک نقطه تغذیه در نظر گرفته می شود، در حالی که تغذیه منطقه ای ناشی از بارش و یا پساب کشاورزی، یک تغذیه توزیعی می باشد.

جهت مدل‌سازی آبخوان با استفاده از رویکرد حل عددی، شبکه زیر که در آن چاهی در یک حجم بی نهایت کوچک

$b \times \Delta x \times \Delta y$ متمرکز شده است، در نظر گرفته می شود. در صورتی که چاه با سرعت Q (حجم در واحد زمان) پمپاژ شود، تابع

$R(x,y)$ برای مساحت سطح بی نهایت کوچک در حدود (x_0, y_0) ، به صورت زیر خواهد بود:

$$R(x,y) = \frac{-Q}{\Delta x \times \Delta y}$$

در این مسأله در واقع حجم آب تخلیه شده در واحد زمان از واحد سطح آبخوان است.

سایر داده های این مسأله:

چاه با دبی ۲۰۰۰ مترمکعب در روز از آبخوانی که قابلیت انتقال آن ۳۰۰ متر مربع در روز است، پمپاژ

می شود. قبل از پمپاژ، تراز سطح استاتیک آب در چاه، ۱۰ متر می باشد. فرض می شود که افت ناشی از

برداشت از این چاه تا فاصله شعاعی ۲۰۰۰ متر از آن گسترش می یابد.

یعنی سطح استاتیک آب برای فواصل بیش از ۲۰۰۰ متر از چاه بی تاثیر است.

در این شکل، نقاط پر رنگ، نشان دهنده نقاط داخل محدوده آبخوان

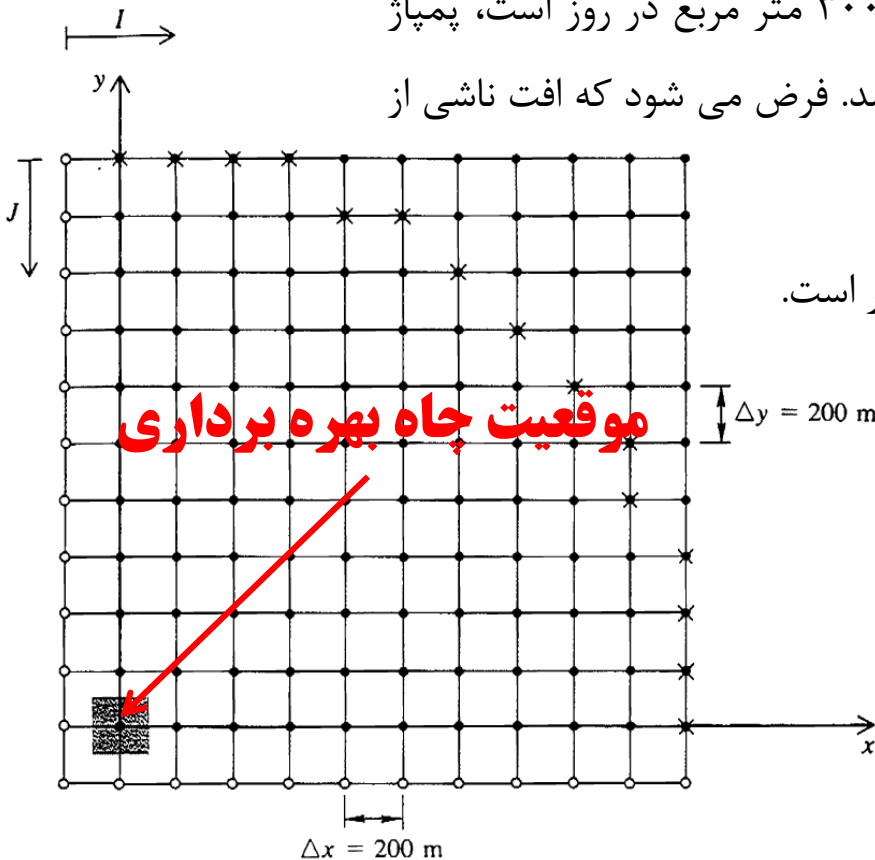
و سطح هاشور خورده بیانگر موقعیت چاه بهره برداری در مبدا است.

نقاط توخالی، گره های ساختمانی هستند که برای شبیه سازی

مرزهای بدون جریان در امتداد محورهای x و y استفاده می شوند.

بار هیدرولیکی در لبه مخروط افت که با نقاط ستاره دار نشان داده

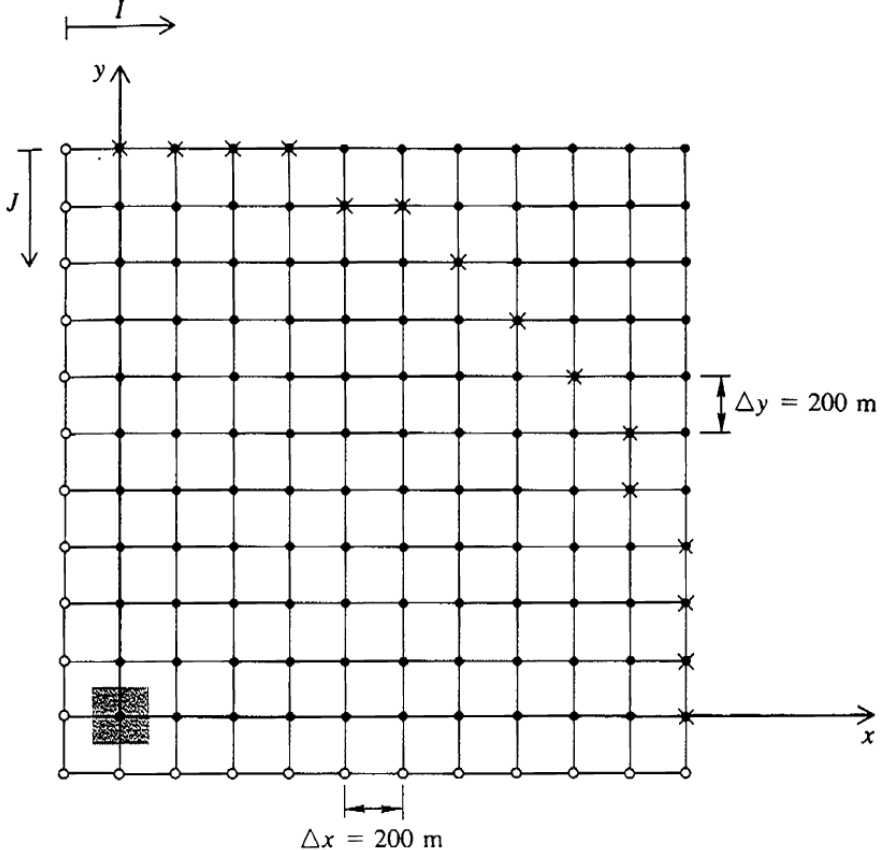
شده است، برابر با ۱۰ متر است.



پس از شروع پمپاژ، خطوط هم پتانسیل دایره ای در اطراف چاه و خطوط جریان شعاعی شکل خواهد گرفت. محورهای تقارن x و y مرزهای بدون جریان باشند. مرکز بیرونی در شعاع ۲۰۰۰ متر دایره ای است و بار هیدرولیکی در امتداد آن ۱۰ متر است. فاصله بین گره ها $\Delta x = \Delta y = 200 \text{ m}$ انتخاب شده است. شبکه تفاضل محدود این مسئله مطابق شکل زیر است.

$$R(x, y) = \frac{-Q}{\Delta x \times \Delta y} = \frac{-2000}{200 \times 200} = -0.05 \text{ m/day}$$

نرخ برداشت برای گره ای که حاوی چاه است برابر با ۰/۰۵ متر در روز بوده و برای سایر گره های دیگر صفر است. با استفاده از روش SOR و در نظر گرفتن مقدار ω برابر با ۱/۸، می توان مقدار بار هیدرولیکی را در هر یک از گره ها تعیین نمود.



جهت مقایسه جواب های بدست آمده از حل عددی، می توان نتایج راه حل تحلیلی آن (بر اساس رابطه زیر) مقایسه نمود:

$$h(r) = h(r_e) + \frac{Q}{2\pi T} \ln\left(\frac{r}{r_e}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Q = 2000 \text{ m}^3/\text{day}$$

$$r_e = 2000 \text{ m}$$

$$T = 300 \text{ m}^2/\text{day}$$

حل عددی مسائل آبخوان آزاد با توجه به فرضیات DUPUIT

در آبخوان های آزاد، ضخامت اشباع سفره به دلیل متغیر بودن ارتفاع سطح آب، در نقاط مختلف آبخوان متفاوت است. جهت تحلیل جریان در این آبخوان ها، جریان یک بعدی در نظر گرفته می شود. بر مبنای فرضیات دوپویی (افقی بودن جریان و برابر بودن گرادیان هیدرولیکی با شیب سطح آزاد آب)، سطح تراوش در مرز خروجی این جریان وجود ندارد. جهت استخراج معادله حاکم بر این جریان، ابتدا تحلیل پیوستگی برای یک برش بی نهایت کوچک از آبخوان انجام می شود. این برش عمود بر جریان است. در صورتی که بارهای هیدرولیکی در سمت چپ و راست این آبخوان به ترتیب برابر با h_1 و h_2 باشد، با استفاده از رابطه پیوستگی و داری می توان معادله زیر را ارائه نمود:

$$Q_2 - Q_1 = -K\Delta y \left[h_2 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_2} - h_1 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_1} \right]$$

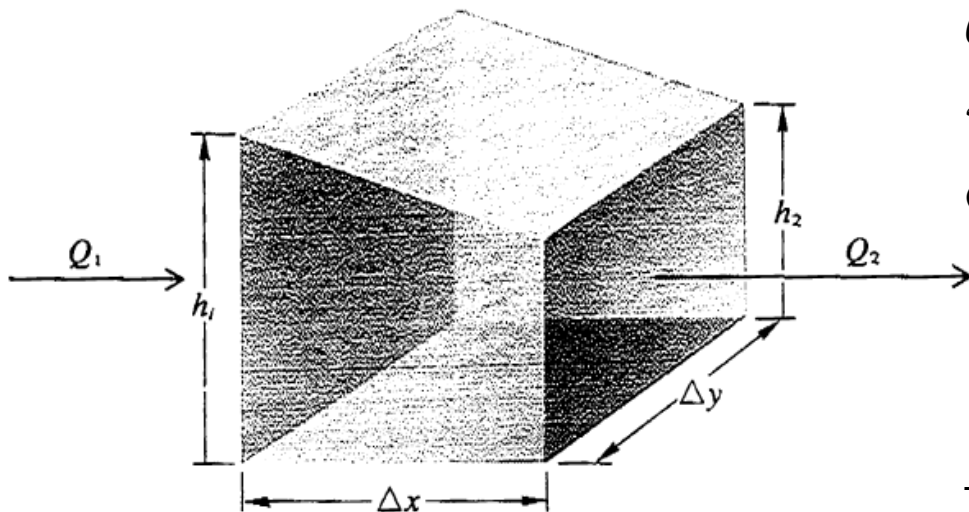
در صورتی که R نرخ تغذیه از سطح در نظر گرفته شود، با استفاده از رابطه پیوستگی برای المان حجمی در نظر گرفته شده، می توان رابطه زیر را ارائه نمود:

$$Q_2 - Q_1 = R\Delta x\Delta y$$

از آنجا که هر یک از عبارت های داخل پرانتز در رابطه اول به صورت مشتقی از h^2 می باشد ($\partial h^2 / \partial x = 2h \partial h / \partial x$)

لذا این رابطه به صورت زیر خلاصه می شود:

$$-\frac{K}{2} \frac{\left[\frac{\partial h^2}{\partial x} \Big|_{x_2} - \frac{\partial h^2}{\partial x} \Big|_{x_1} \right]}{\Delta x} = R$$



زمانی که $\Delta x \rightarrow 0$ ، عبارت داخل پرانتز برابر با $\partial^2 h^2 / \partial x^2$ شده و این رابطه برای جریان یک بعدی در آبخوان آزاد تحت مفروضات Dupuit، به رابطه زیر تبدیل می گردد:

$$\frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = -R$$

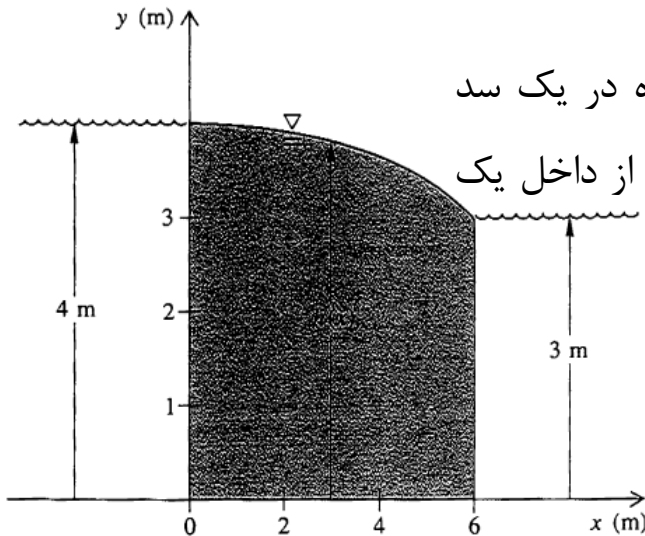
در جریان دوبعدی رابطه فوق به صورت زیر خواهد بود (معادله پواسون):

$$\frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) = -R$$

جهت حل این رابطه، شرایط مرزی باید به جای h بر حسب v بازنگری شود. بعد از تعیین مقدار v ، می توان با گرفتن جذر از آن، مقدار h را بدست آورد.

$$\text{if } v = h^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{2R}{K}$$

مدلسازی عددی نشت از داخل سد خاکی



نمونه ای از یک سیستم جریان آبخوان آزاد را می توان در منطقه اشباع ایجاد شده در یک سد خاکی مشاهده نمود. مطابق شکل، با استفاده از معادله پواسون، جریان نشتی عبوری از داخل یک سد خاکی مورد مدلسازی عددی قرار می گیرد.

دریاچه مخزن سد دارای ارتفاع ۴ متر و تراز سطح آب در پایین دست آن برابر با ۳ متر است. کف سد در $y = 0$ بر روی سنگ بستر نفوذناپذیر قرار دارد.

در صورتی که جریان یک بعدی در نظر گرفته شود، با استفاده از تقریب Dupuit، جریان عبوری از داخل سد، افقی است و مرز اشباع بالایی، مخزن را در دو تراز ارتفاعی بالادست و پایین دست سد قطع می کند. در این مسئله تراوش، سطح بالایی یک مرز بدون جریان است و بار هیدرولیکی در هر نقطه از مرز بالایی برابر با ارتفاع آن تا سطح مبنا می باشد.

با حل این مسأله در یک بعد و با قرار دادن $R = 0$ و اعمال شرایط مرزی، می توان راه حل تحلیلی از این مسأله به صورت زیر ارائه نمود:

$$\frac{K}{2} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = -R \Rightarrow \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow h^2 = a_1 x + a_2$$

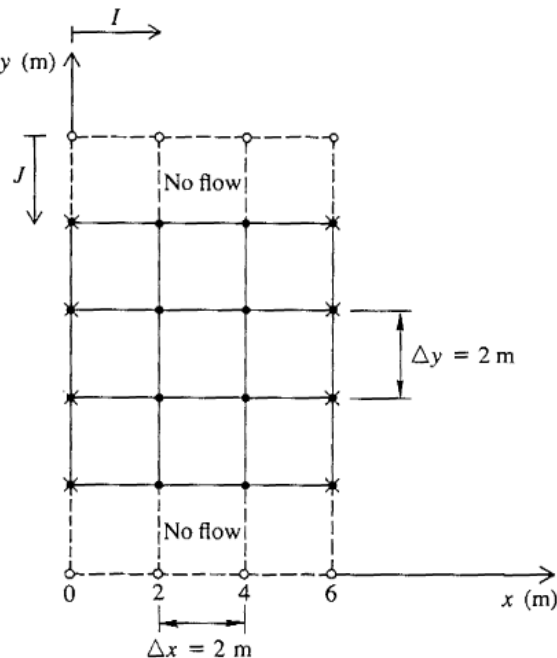
ثابت هایی هستند که با جایگزینی شرایط مرزی تعیین می شوند.

$$\begin{cases} \text{in } x = 0 \Rightarrow h = 4 \text{ m} \Rightarrow a_2 = 16 \\ \text{in } x = 6 \Rightarrow h = 3 \text{ m} \Rightarrow a_1 = -1.17 \end{cases}$$

$$h = \sqrt{-1.17x + 16}$$

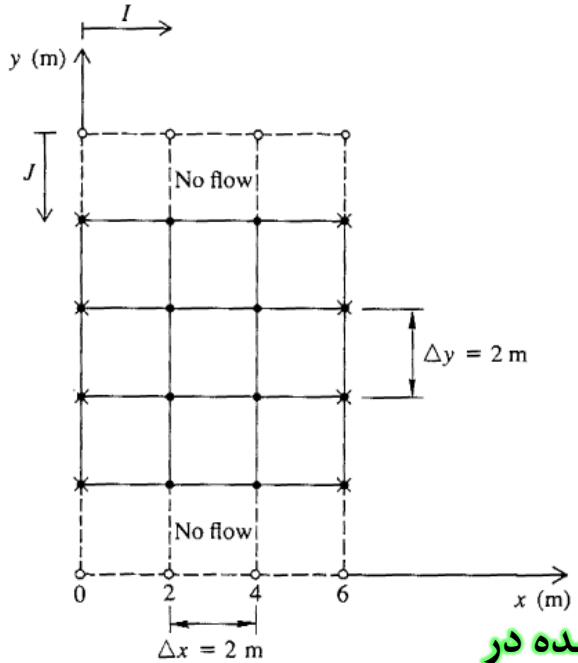
راه حل تحلیلی نهایی بر اساس شرایط مرزی مورد استفاده در این مسئله است، عبارتند از:

حل عددی دو بعدی با استفاده از روش تفاضل محدود:



مطابق شکل مقابل، مرزهای بالا (با توجه به عدم تغذیه از سطح) و پایین، بدون جریان هستند تا جریان در جهت x جاری باشد. با استفاده از مفروضات Dupuit بار هیدرولیکی به صورت عمودی تغییر نمی کند. با توجه به افقی بودن جریان، محدوده مدلسازی به صورت یک مستطیل با ابعاد ۴ متر عمودی در ۶ متر افقی در نظر گرفته می شود. از آنجا که تغذیه از سطح برابر با صفر است و ابعاد المان ها تأثیری در مقدار بار هیدرولیکی محاسباتی ندارد، لذا جهت مربع شدن ابعاد المان ها، $\Delta x = \Delta y = 2$ در نظر گرفته می شود.

با استفاده از روش تکراری گوس-سایدل، می توان مقدار بار هیدرولیکی در هر یک از گره ها را تعیین نمود و با مقادیر بدست آمده از راه حل تحلیلی مقایسه کرد.



مقدار بار هیدرولیکی محاسبه شده در گره ها (حل تحلیلی با استفاده از

مقدار بار هیدرولیکی محاسبه شده در گره ها (روش گوس-سایدل)

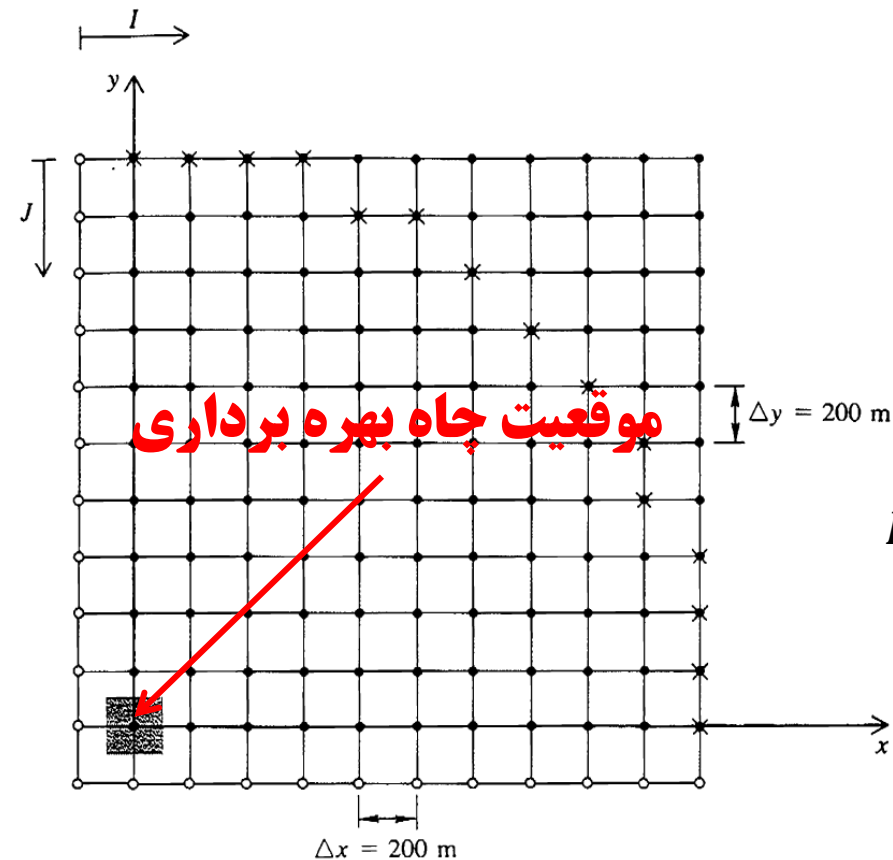
رابطه $h = \sqrt{-1.17x + 16}$

4	3.70	3.36	3.00	4.00	3.70	3.37	3.00
4	3.70	3.36	3.00	4.00	3.70	3.37	3.00
4	3.70	3.36	3.00	4.00	3.70	3.37	3.00
4	3.70	3.36	3.00	4.00	3.70	3.37	3.00

تخلیه توسط چاه در آبخوان آزاد

چاه با دبی ۲۰۰۰ مترمکعب در روز از آبخوان آزاد با هدایت هیدرولیکی ۳۰ متر در روز پمپاژ می شود. ضخامت اشباع اولیه آبخوان، ۱۰ متر می باشد. قبل از پمپاژ، تراز سطح استاتیک آب در چاه، ۱۰ متر بوده و فرض می شود که افت ناشی از برداشت از این چاه تا فاصله شعاعی ۲۰۰۰ متر از آن گسترش می یابد. یعنی سطح استاتیک آب برای فواصل بیش از ۲۰۰۰ متر از چاه بی تأثیر است. **بار**

هیدرولیکی در لبه مخروط افت که با نقاط ستاره دار نشان داده شده است، برابر با ۱۰ متر است. با در نظر گرفتن فرضیات Dupuit و شرایط مرزی و معادله پواسون، مقدار بار هیدرولیکی در نقاط مختلف آبخوان را بر اساس حل عددی SOR تعیین نمایید.



پس از شروع پمپاژ، خطوط هم پتانسیل دایره ای در اطراف چاه و خطوط جریان شعاعی شکل خواهد گرفت. محورهای تقارن x و y مرزهای بدون جریان باشند. مرز بیرونی در شعاع ۲۰۰۰ متر دایره ای است و بار هیدرولیکی در امتداد آن ۱۰ متر است. فاصله بین گره ها $\Delta x = \Delta y = 200 m$ انتخاب شده است.

$$R(x, y) = \frac{-Q}{\Delta x \times \Delta y} = \frac{-2000}{200 \times 200} = -0.05 \text{ m/day}$$

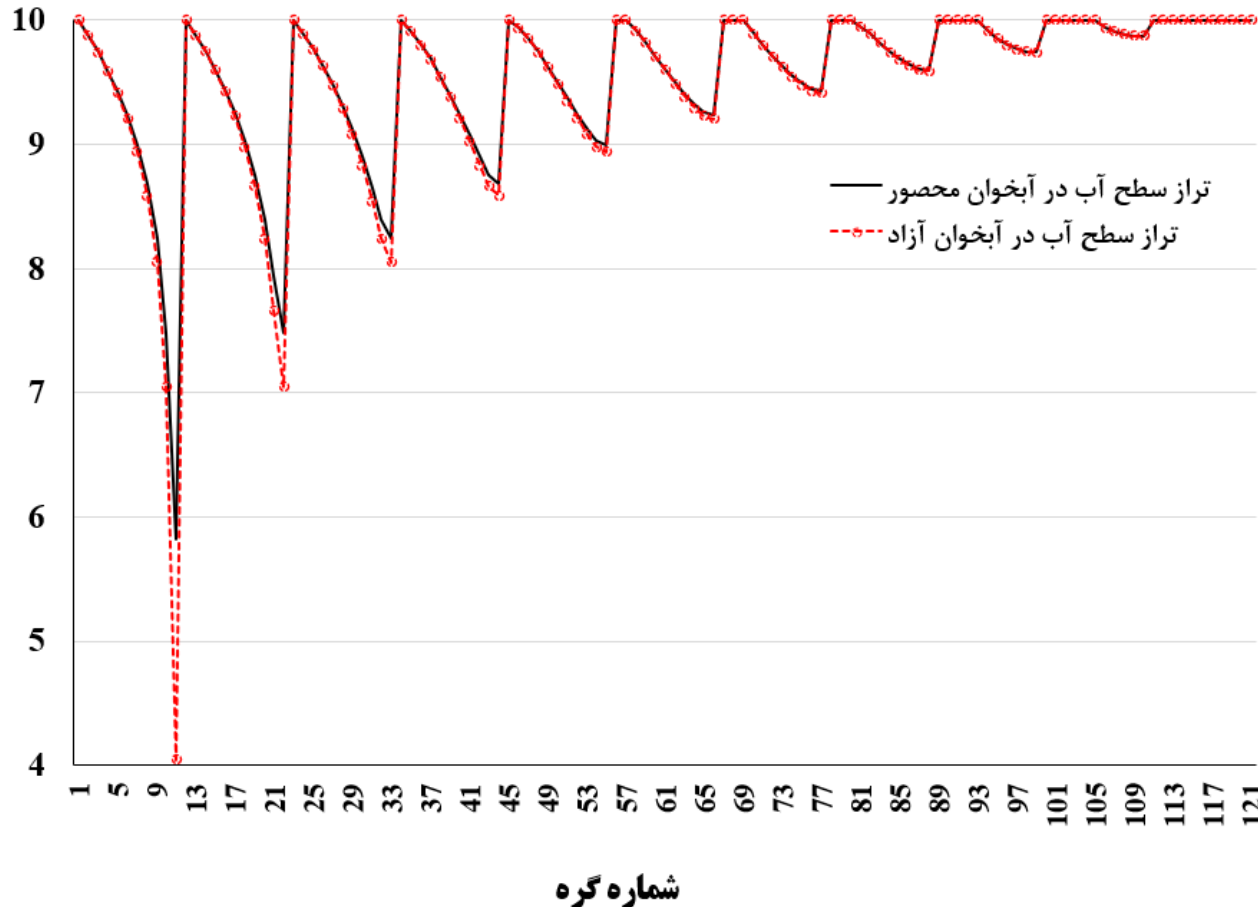
نرخ برداشت برای گره ای که حاوی چاه است برابر با ۰/۰۵ متر در روز بوده و برای سایر گره های دیگر صفر است. با استفاده از روش SOR و در نظر گرفتن مقدار ω برابر با ۱/۸، می توان مقدار بار هیدرولیکی را در هر یک از گره ها تعیین نمود.

جهت مقایسه جواب های بدست آمده از حل عددی، می توان نتایج را حل تحلیلی آن (بر اساس رابطه زیر) مقایسه نمود:

$$h^2(r) = h^2(r_e) + \frac{Q}{\pi K} \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) \quad Q = 2000 \text{ m}^3/\text{day} \quad , r_e = 2000 \text{ m} \quad , K = 30 \text{ m}/\text{day}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

با مقایسه نتایج بدست آمده از بهره برداری از چاه در دو آبخوان محصور و آزاد می توان دریافت که به دلیل ثابت نبودن ضخامت اشباع در آبخوان آزاد، تراز محاسباتی اندکی با تراز بدست آمده در آبخوان محصور متفاوت است.



برای مسائلی که در آن ها میزان افت نسبت به ضخامت آبخوان کوچک است، به دلیل اینکه Kh تقریباً ثابت و برابر با مقدار ضریب قابلیت انتقال آبخوان محصور می باشد، می توان انتظار داشت که جواب ها در دو آبخوان تقریباً به هم نزدیک باشند.

معیارهای ارزیابی درجه اعتبار یک راه حل عددی

جهت ارزیابی درجه اعتبار راه حل های عددی، روش های مختلفی پیشنهاد شده است که عبارتند از:

۱- مقایسه با راه حل های تحلیلی: این روش عمدتاً برای مسائل همگن، همسان و جریان های یک بعدی می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۲- ابعاد شبکه در نظر گرفته شده برای حل عددی: ابعاد ریزتر منجر به افزایش زمان اجرا و در نتیجه همگرایی دیرتر روش های عددی می شود. اما در این حالت، جواب های بدست آمده از دقت بالایی برخوردار می باشند. هر چه ابعاد درشت تر انتخاب شوند، امکان افزایش خطا در برآورد رفتار واقعی آبخوان بیشتر خواهد شد.

۳- معیار خطای توقف: آستانه حساسیت مدل های عددی به معیار خطای توقف با اجرای مکرر مدل قابل تعیین است. هرچه این شاخص بزرگتر انتخاب شود، قطعاً جواب های بدست آمده از خطای بیشتری برخوردار خواهند بود و بالعکس.

۴- انجام محاسبه تعادل جرمی: محاسبه تعادل جرم بیانگر این واقعیت است که در حالت پایدار، مقدار آب ورودی به سیستم برابر با مقدار آب خروجی از سیستم است. اگر جریان ورودی در یک مدل شبیه سازی تحت شرایط پایدار برابر با جریان خروجی نباشد، ممکن است مشکلی در حل عددی وجود داشته باشد. با این حال، یک خطای بزرگ در این موازنه جرمی نیز ممکن است نشان دهنده عدم دقت در محاسبه موازنه جرم باشد.

نکته: هدف اکثر مدل های شبیه سازی، پیش بینی اثرات طرح های مدیریتی بر روی یک سیستم آب زیرزمینی است. فرآیند کالیبراسیون

(Calibration) و راستی آزمایی (Verification) به طور کلی نیاز به تنظیم پارامترهای مدل و یا تنظیم صحیح شرایط مرزی دارد.

حل عددی معادله جریان تحت شرایط ناپایدار

مسائل جریان ناپایدار مسائلی هستند که در آن متغیر مجهول وابسته به زمان است. یعنی بارها هیدرولیکی نسبت به زمان تغییر می کنند. این مسائل وابسته به زمان را مسائل ناپایدار (unsteady)، غیرتعادلی (nonequilibrium) یا حالت غیرپایدار (nonsteady-state) نیز می نامند. در استخراج معادله حاکم برای شرایط ناپایدار، معادله پیوستگی به گونه‌ای اصلاح می شود که نرخ حجمی جریان خروجی برابر با نرخ حجمی جریان ورودی به اضافه نرخ جریان خارج شده از ذخیره آبخوان باشد. بنابراین، لازم است عبارت زیر برای میزان رهاسازی آب از ذخیره آبخوان در نظر گرفته شود:

$$S = - \frac{\Delta V_w}{\Delta x \Delta y \Delta h}$$

S : ضریب ذخیره آبخوان، که نشان دهنده حجم آب آزاد شده از ذخیره آبخوان در واحد سطح به ازای یک واحد افت در بار هیدرولیکی است.

ΔV_w : حجم آب آزاد شده از ذخیره موجود در المان حجمی به مساحت $\Delta x \Delta y$ و ضخامت b

علامت منفی ارائه شده به صورت زیر تفسیر می شود: زمانی که آب از ذخیره خارج می شود، ΔV_w مثبت و Δh منفی است و هنگامی که آب وارد ذخیره آبخوان می شود، ΔV_w منفی و Δh مثبت در نظر گرفته می شود.

نرخ رهاسازی آب از ذخیره، $\frac{\Delta V_w}{\Delta t}$ است و می تواند به صورت $-S \Delta x \Delta y (\Delta h / \Delta t)$ ارائه شود. زمانی که $\Delta t \rightarrow 0$ ، این عبارت به $-S \Delta x \Delta y (\partial h / \partial t)$ تبدیل می شود.

بنابراین معادله پیوستگی تحت شرایط ناپایدار به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \Delta x (b \Delta y) + \frac{\partial q_y}{\partial y} \Delta y (b \Delta x) = R(x, y, t) \Delta x \Delta y - S \frac{\partial h}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

با جایگذاری رابطه داری برای q_x و q_y و تقسیم طرفین رابطه بر $-T \Delta x \Delta y$ ، معادله جریان تحت شرایط ناپایدار بدست می آید:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{R(x, y, t)}{T}$$

در این بخش، نحوه حل عددی این معادله با استفاده از تقریب صریح (explicit) و غیرصریح (implicit) ارائه می شود.

همانطور که قبلاً عنوان شد، برای حل معادله لاپلاس، نیاز به شرایط مرزی است. در واقع یک معادله حاکم (همانند معادله لاپلاس یا معادله پواسون) و شرایط مرزی (boundary conditions)، یک مدل ریاضی از یک سیستم جریان آب زیرزمینی در حالت پایدار را تشکیل می دهند. برای شرایط غیرپایدار، علاوه بر شرایط مرزی، لازم است مجموعه معنی داری از مقادیر بار هیدرولیکی در شروع شبیه سازی مشخص باشد. این مقادیر بار هیدرولیکی به **عنوان شرایط اولیه** (initial conditions) در نظر گرفته می شود.

با استفاده از شرایط اولیه، معادلات جریان جهت تعیین بار هیدرولیکی در زمان های بعد مورد حل قرار می گیرند. زمانی که تغییرات بار هیدرولیکی شبیه سازی شده در هر گام زمانی ثابت شد، محاسبات مرتبط با آن گام زمانی متوقف می شود. این روند برای تمامی گام های زمانی در نظر گرفته شده، انجام می شود.

حل عددی معادله جریان در آبخوان محصور با استفاده از تقریب تفاضل محدود صریح

در صورتی که شبکه ای از نقاط گره ای را برای یک آبخوان ایجاد نمائیم، با استفاده از تقریب تفاضل محدود می توان مشتقات مکانی و زمانی بار هیدرولیکی را به صورت زیر ارائه نمود. لازم به ذکر است همانطور که در مکان گسسته سازی انجام می شود، در زمان نیز گام های زمانی تعریف می گردد. در این روابط مقدار بار هیدرولیکی در سطح زمانی n را به سه صورت تقریب تفاضل محدود پیشرو (forward difference approximation)، تقریب تفاضل محدود پسرو (backward difference approximation) و یا تقریب تفاضل محدود مرکزی (central difference approximation) می توان ارائه نمود.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Forward difference approximation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^n - h_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}$$

Backward difference approximation

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}$$

Central difference approximation

باید از این تقریب اجتناب شود زیرا این تقریب بدون قید و شرط ناپایدار است.

با استفاده از تقریب تفاضل محدود پیشرو، شکل تفاضل محدود معادله جریان ناپایدار به صورت زیر قابل ارائه است. لازم به ذکر است مشتقات مکانی در گام زمانی n معلوم می باشند.

$$\frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{R_{i,j}^n}{T}$$

$$\text{If } \Delta x = \Delta y = a \Rightarrow$$

$$h_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{4T\Delta t}{Sa^2}\right) h_{i,j}^n + \left(\frac{4T\Delta t}{Sa^2}\right) \left(\frac{h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n}{4}\right) + \frac{R_{i,j}^n}{S\Delta t}$$

معادله فوق به عنوان یک تقریب تفاوت محدود صریح یا پیشرو (Explicit or Forward difference approximation) نامیده می شود زیرا $h_{i,j}^{n+1}$ بر حسب مقادیر معلوم h در گره های اطراف گره (i,j) مورد ارزیابی قرار می گیرد. با مشخص بودن بار هیدرولیکی در اولین گام زمانی، می تون مقدار بار هیدرولیکی در گام های زمانی بعد را برای تمامی گره ها تعیین نمود.

نکته: اگر $R = 0$ باشد، معادله فوق اساساً همان معادله ارائه شده در روش SOR است که در آن $\omega = \frac{4T\Delta t}{Sa^2}$ می باشد.

ارزیابی درجه اعتبار راه حل صریح

در راه حل های عددی، مقادیر بار هیدرولیکی تولید شده ممکن است به فاصله بین گره ها و Δt حساس باشد. یک تقریب تفاضل محدود در صورتی همگرا خواهد بود که مقادیر بارهای هیدرولیکی محاسبه شده در تمامی گره ها و در زمان های مختلف به مقادیر صحیح خود نزدیک باشد. به عبارت دیگر یک تقریب تفاضل محدود در صورتی پایدار است که با افزایش گام زمانی، خطاها کاهش یابند. در تقریب صریح، جهت پایدار شدن راه حل عددی، لازم است $T\Delta t/Sa^2$ به اندازه کافی کوچک نگه داشته شود. در جریان یک بعدی، که جریان فقط در جهت x رخ می دهد، پارامتر $T\Delta t/Sa^2$ باید کمتر یا مساوی 0.5 باشد. در جریان دوبعدی که در آن $\Delta x = \Delta y = a$ ، $T\Delta t/Sa^2$ باید کمتر یا مساوی 0.25 باشد. در صورت عدم رعایت این شروط، راه حل ارائه شده ناپایدار خواهد شد.

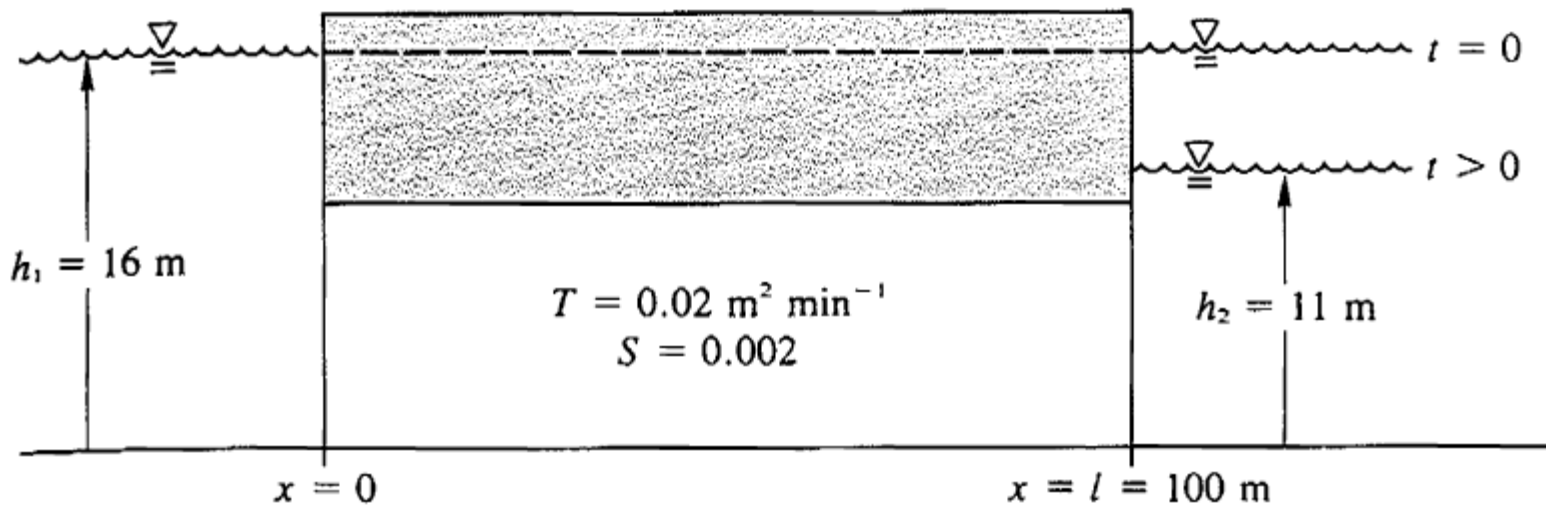
(مثال) واکنش آبخوان محصور به تغییر ناگهانی در تراز سطح آب در مخزن

آبخوانی محصور مطابق شکل زیر جهت تحلیل جریان در نتیجه تغییر ناگهانی تراز سطح آب مدنظر است. بار هیدرولیکی در سراسر آبخوان در ابتدا برابر با ۱۶ متر است. اگر در زمان $t = 0$ ، ناگهان تراز سطح آب در مخزن در $x = l$ از ۱۶ متر به ۱۱ متر کاهش یابد، تغییرات زمانی بار هیدرولیکی را شبیه سازی نمایید. پارامترهای آبخوان در شکل مشخص شده است.

(حل) در صورتی که جریان در جهت y ناچیز در نظر گرفته شود، معادله یک بعدی حاکم بر این مسأله ناپایدار به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \forall t > 0 \Rightarrow \begin{cases} h(0, t) = h_1 = 16 \text{ m} \\ h(l = 100 \text{ m}, t) = h_2 = 11 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{شرایط اولیه} \quad h(x, 0) = h_1, \quad 0 \leq x \leq l = 100 \text{ m}$$



با استفاده از تقریب اختلاف محدود صریح (Explicit finite difference approximation) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{S}{T} \left(\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \right)$$

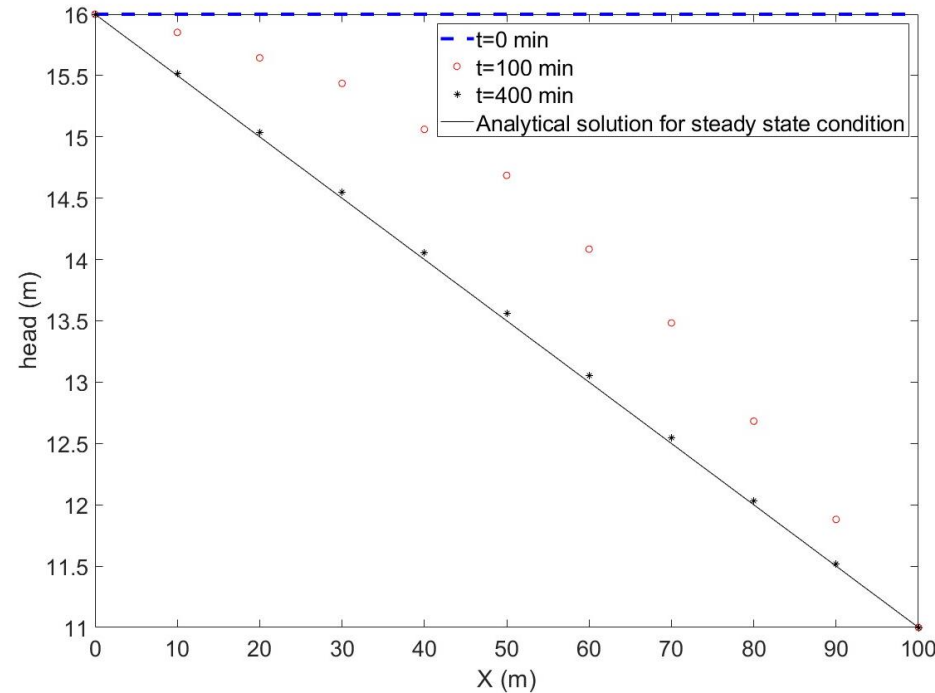
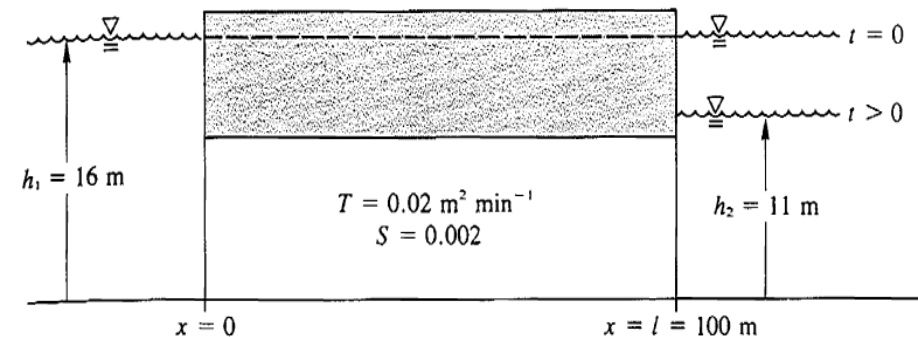
با استخراج مقدار h_i^{n+1} از رابطه فوق:

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{T\Delta t}{S} \left(\frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right)$$

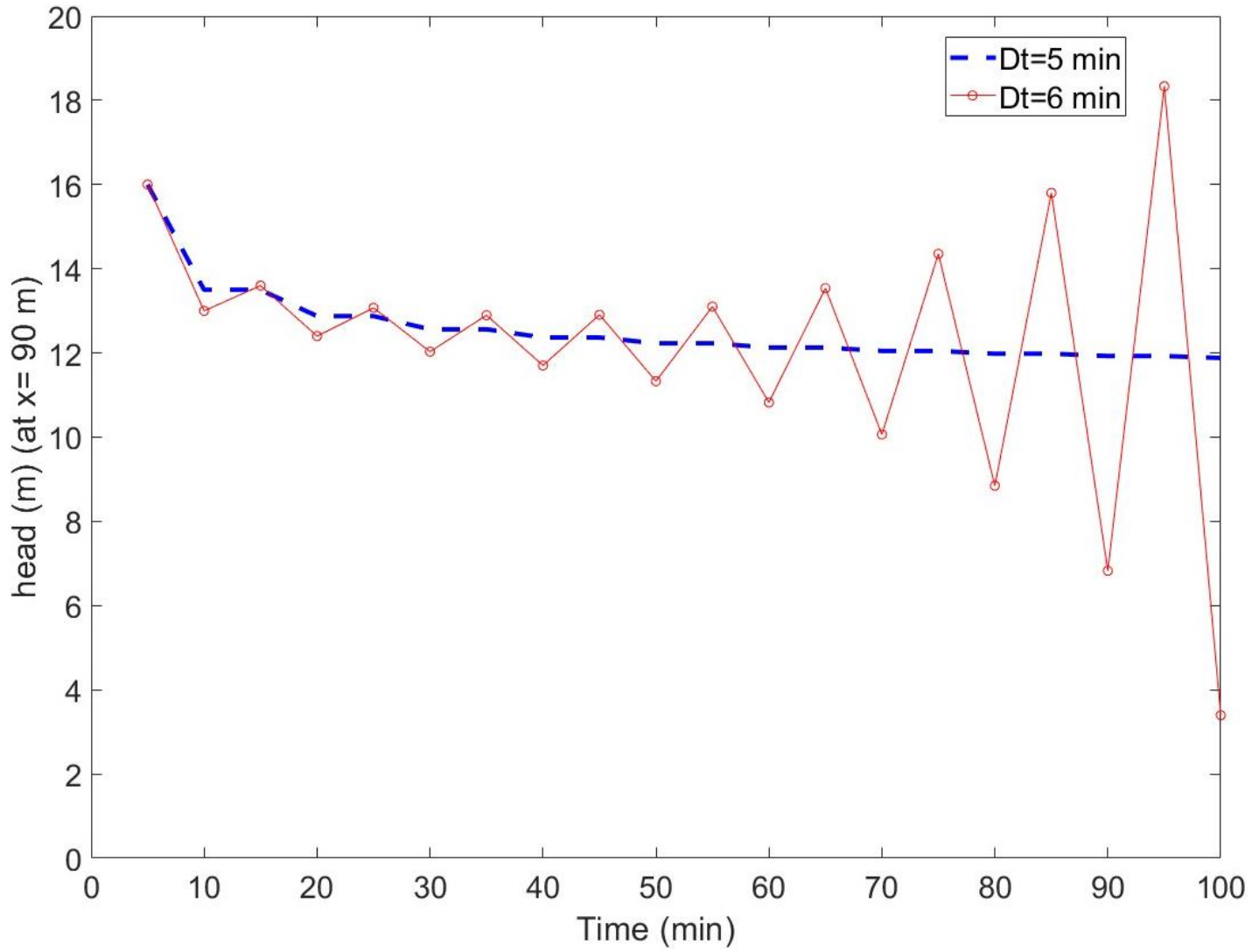
جهت حل تحلیلی این مسأله ناپایدار، شبکه اختلاف محدود در نظر گرفته شده دارای فاصله گره $\Delta x = 10 \text{ m}$ است. جهت پایدار شدن راه حل عددی، لازم است $T\Delta t / S(\Delta x)^2 < 0.5$ باشد. یعنی Δt باید کمتر یا مساوی ۵ دقیقه در نظر گرفته شود. با استفاده از Δt برابر با ۵ دقیقه، تغییرات زمانی بار هیدرولیکی در گام های زمانی مختلف استخراج می شود.

راه حل تحلیلی این روش تحت شرایط پایدار:

$$h(x) = \left(\frac{h_2 - h_1}{l} \right) x = \left(\frac{11 - 16}{100} \right) x = -0.05x$$



در این مسأله با توجه به اینکه مقدار Δt کمتر از 0.5 منجر به ایجاد پایداری در راه حل عددی صریح گردید، لذا با افزایش این مقدار، راه حل عددی ناپایدار می شود. به عنوان مثال، با افزایش مقدار Δt از 5 دقیقه به 6 دقیقه، همانطور که در شکل زیر مشاهده می شود، مقدار بار هیدرولیکی به عنوان نمونه در موقعیت $x = 90 \text{ m}$ نوسانی شده و به مقدار مشخصی همگرا نمی شود.



حل عددی معادله جریان در آبخوان محصور با استفاده از تقریب تفاضل محدود ضمنی (غیر صریح)

در معادله صریح تقریب تفاضل محدود، مقدار بار هیدرولیکی گره ها فقط به مقادیر بار هیدرولیکی در گام زمانی قبلی وابسته بود و یک رابطه صریح به صورت زیر بدست آمد:

$$h_{i,j}^{n+1} = \left(1 - \frac{4T\Delta t}{Sa^2}\right) h_{i,j}^n + \left(\frac{4T\Delta t}{Sa^2}\right) \left(\frac{h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n}{4}\right) + \frac{R_{i,j}^n}{S\Delta t}$$

با توجه به اینکه مقدار بار هیدرولیکی بین گام های زمانی (n) و $(n + 1)$ در تمام گره ها در حال تغییر است، استفاده از مقادیر بار هیدرولیکی در گام زمانی (n) برای تقریب مشتقات مکانی تنها در صورتی معتبر است که Δt نسبتاً کوچک در نظر گرفته شود. جهت بهبود تقریب های مرتبط با مشتقات مکانی در زمان های بین $t = n\Delta t$ و $t = (n + 1)\Delta t$ می توان از میانگین وزنی تقریب های گام های زمانی (n) و $(n + 1)$ استفاده نمود. در صورتی که پارامتر وزن دهی با α نشان داده شود (بین ۰ و ۱) و عبارات مرتبط با تقریب در گام های زمانی (n) و $(n + 1)$ به ترتیب با وزن های α و $(1 - \alpha)$ نمایش داده شوند، در این صورت مشتقات جزئی در هر جهت به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \alpha \frac{h_{i+1,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1 - \alpha) \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \alpha \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} + (1 - \alpha) \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}$$

جهت ساده سازی، عبارت $\tilde{h}_{i,j}^n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{h}_{i,j}^n = \frac{h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n + h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n}{4}$$

بر این اساس، رابطه دو بعدی جریان تحت شرایط ناپایدار با استفاده از تقریب های وزن دهی شده، بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \alpha \frac{h_{i+1,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1 - \alpha) \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \alpha \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} + (1 - \alpha) \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{R(x,y,t)}{T}$$

$$\Delta x = \Delta y = a$$

$$\alpha (\tilde{h}_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}) + (1 - \alpha) (\tilde{h}_{i,j}^n - h_{i,j}^n) = \frac{Sa^2}{4T} \left(\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} \right) - \frac{a^2 R_{i,j}^n}{4T}$$

اگر $\alpha = 0$ باشد، معادله غیرصریح (ضمنی) به معادله صریح تبدیل می شود. به طور کلی در رابطه فوق، بارهای هیدرولیکی علاوه بر نقطه (i, j) ، در چهار گره اطراف آن نیز در گام زمانی $(n + 1)$ مجهول می باشند. این معادله از آنجا که مقدار $h_{i,j}^{n+1}$ را به صورت صریح توسط مقادیر معلوم بیان نمی کند، به عنوان یک تقریب ضمنی (implicit approximation) در نظر گرفته می شود.

$$\alpha (\tilde{h}_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}) + (1 - \alpha) (\tilde{h}_{i,j}^n - h_{i,j}^n) = \frac{Sa^2}{4T} \left(\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} \right) - \frac{a^2 R_{i,j}^n}{4T}$$

با مرتب نمودن رابطه فوق، می توان مقدار $h_{i,j}^{n+1}$ را با استفاده از تقریب ضمنی محاسبه نمود:

$$h_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{[(Sa^2/4T\Delta t) + \alpha]} \left[\alpha \tilde{h}_{i,j}^{n+1} + \frac{Sa^2}{4T\Delta t} h_{i,j}^n + (1 - \alpha) (\tilde{h}_{i,j}^n - h_{i,j}^n) + \frac{a^2 R_{i,j}^n}{4T} \right]$$

معادله فوق سیستمی از معادلات خطی از $h_{i,j}$ در گام زمانی $(n + 1)$ را نشان می دهد. این سیستم را می توان مستقیماً با استفاده از روش های ماتریسی یا با روش های تکراری (مشابه آنچه که برای حل سیستم معادلات خطی برای معادلات لاپلاس یا پواسون استفاده گردید) حل نمود. در واقع برای مسائل جریان ناپایدار، باید یک سیستم جدید از معادلات در هر گام زمانی حل شوند. در این بخش، حل معادله فوق با استفاده از روش تکراری گوس-سایدل انجام می شود.

لازم به ذکر است در این روش حل، به عنوان مثال اگر قرار باشد یک شبیه سازی به مدت ۵۰۰ روز با $\Delta t = 5 \text{ day}$ اجرا شود، باید ۱۰۰ سیستم از معادلات خطی فوق برای گره ها حل شود، در حالی که برای مسئله تحت شرایط پایدار، فقط یک سیستم معادله حل می گردد.

$$h_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{[(Sa^2/4T\Delta t) + \alpha]} \left[\alpha \tilde{h}_{i,j}^{n+1} + \frac{Sa^2}{4T\Delta t} h_{i,j}^n + (1 - \alpha)(\tilde{h}_{i,j}^n - h_{i,j}^n) + \frac{a^2 R_{i,j}^n}{4T} \right]$$

پارامتر α توسط مدلساز انتخاب می شود.

- اگر $\alpha = 1$ ، مشتقات مکانی صرفاً در گام زمانی $(n + 1)$ تقریبی می شوند و گفته می شود که طرح تفاضل محدود کاملاً ضمنی است. در واقع، استفاده از طرح کاملاً ضمنی نشان می دهد که مقدار مشتقات مکانی در زمان آینده از تقریب بهتری برخوردار می باشند.
- استفاده از طرح صریح ($\alpha = 0$) نشان می دهد که مقدار مشتقات مکانی مرتبط با گام زمانی گذشته، بهترین تقریب را دارند.
- اگر $\alpha = 0.5$ انتخاب شود، فرض می شود که بهترین تقریب در میان گام های زمانی (n) و $(n + 1)$ قرار دارند. تقریب تفاضل محدود مرتبط با $\alpha = 0.5$ را روش کرانک-نیکولسون (Crank-Nicolson) می نامند.

(مثال) شبیه سازی تغییرات بار هیدرولیکی در اطراف یک چاه در حال پمپاژ حفاری شده در آبخوان محصور

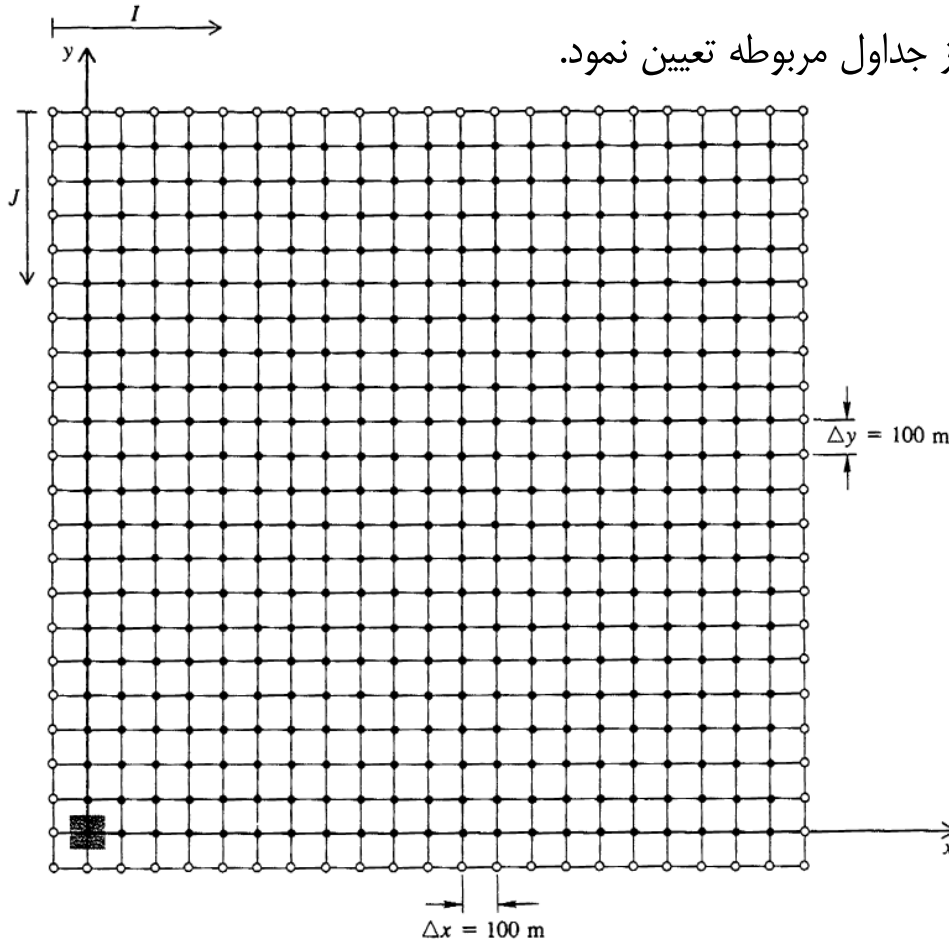
چاهی با دبی ثابت Q از یک آبخوان محصور در منطقه ای گسترده تخلیه می شود. بار پیزومتریک در ابتدا افقی و برابر با

$h_0 = 10 \text{ m}$ است. با استفاده از راه حل تحلیلی ارائه شده توسط Theis (۱۹۳۵)، مقدار افت در شعاع r از چاه به صورت زیر

$$h_0 - h = \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad u = \frac{r^2 S}{4Tt}$$

بدست می آید:

$W(u)$ پارامتر تابع چاه نام دارد و مقدار آن را می توان با استفاده از جداول مربوطه تعیین نمود.



جهت حل تحلیلی، محدوده آبخوان به شبکه هایی با ابعاد

$\Delta x = \Delta y = 100 \text{ m}$ تقسیم گردید. مرزهای آبخوان به

عنوان مرزهای بدون جریان در نظر گرفته می شوند. ضرایب

آبخوان $T = 300 \text{ m}^2/\text{day}$ و $S = 0.002$ است.

دبی تخلیه چاه برابر با ۲۰۰۰ متر مکعب در روز است. ناحیه

تحت نفوذ گره چاه، ناحیه سایه دار است. گره هایی که با دایره

های باز نشان داده می شوند، گره های ساختگی هستند که برای

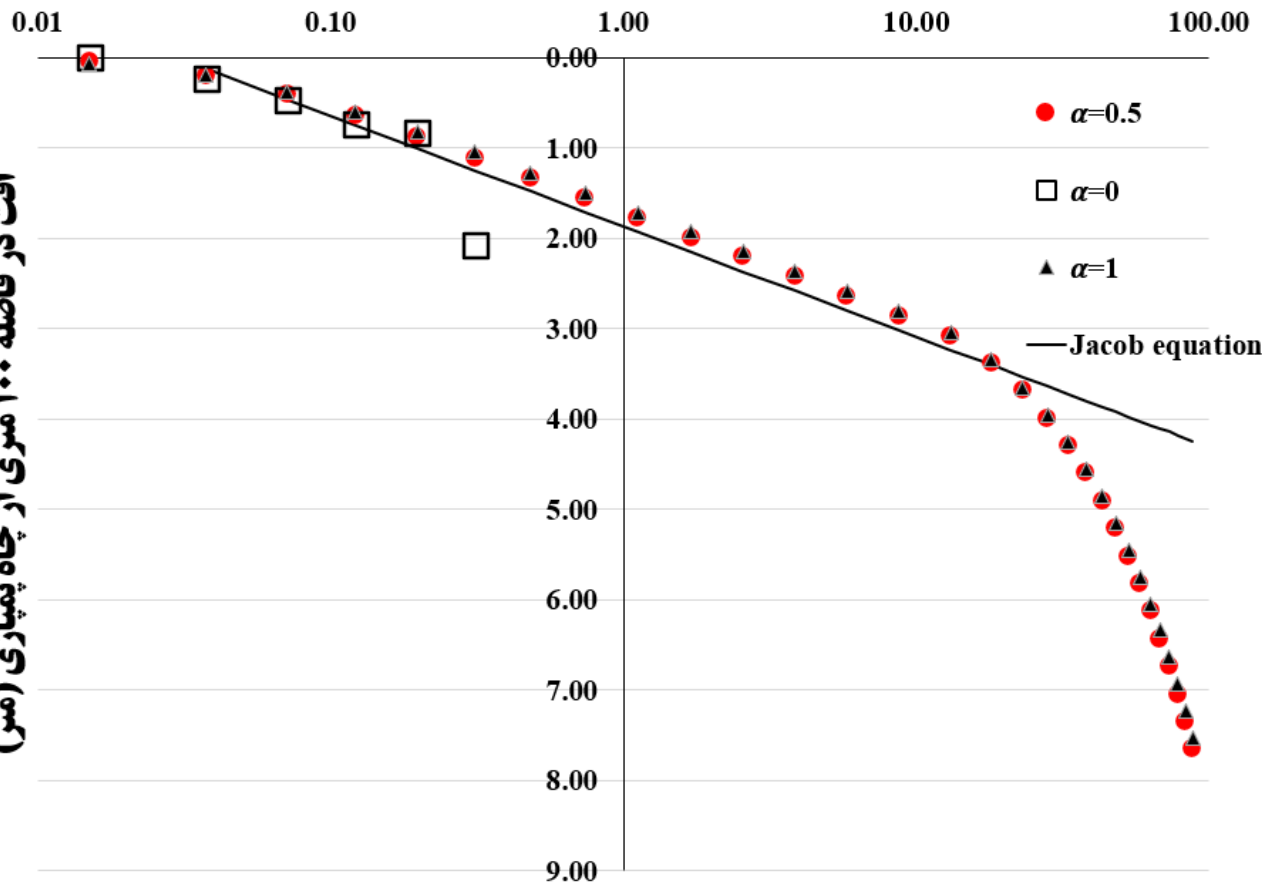
شبیه سازی مرزهای بدون جریان استفاده می شوند. گره های

توپر، نواحی فعال آبخوان را نشان می دهد.

مقایسه نتایج بدست آمده از روش حل عددی با ضرایب مختلف α و حل تحلیلی (روش ژاکوب)

با استفاده از برنامه کامپیوتری تهیه شده و ارائه سه مقدار ۰ (روش کاملاً صریح)، ۱ (روش کاملاً غیر صریح یا ضمنی) و ۰/۵ (روش کرانک-نیکولسون) برای α ، تراز سطح آب زیرزمینی و میزان افت در نقاط اطراف چاه پمپاژی تعیین گردید. در ابتدای شبیه سازی زمانی که بارهای هیدرولیکی به سرعت در حال تغییر هستند، گام های زمانی کوچک انتخاب می شود ($\Delta t = 0.01 \text{ day}$). برداشته می شوند. سپس این گام زمانی افزایش یافته به طوری که با کاهش سرعت تغییر بار هیدرولیکی با زمان، گام های زمانی بزرگ تری انتخاب می گردد.

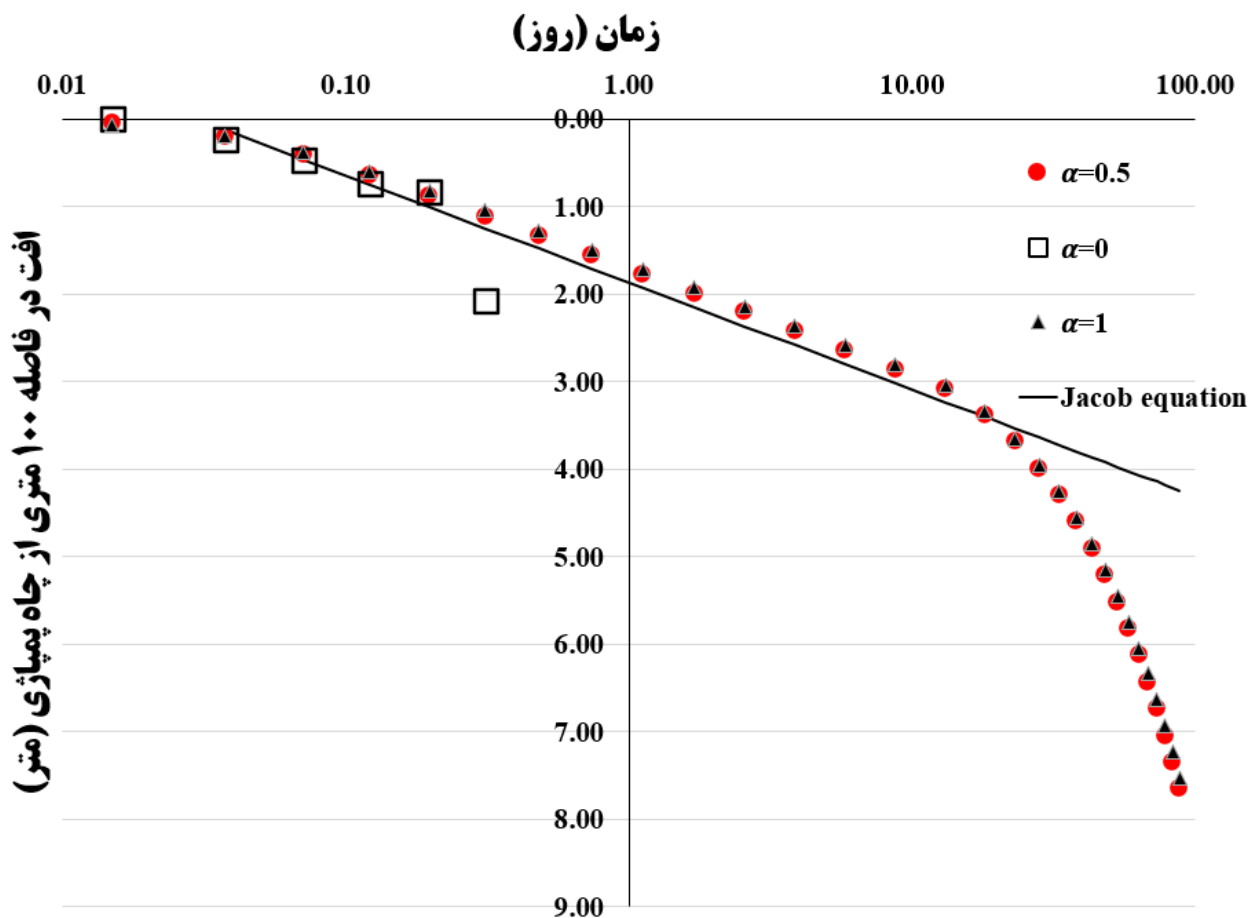
زمان (روز)



همانطور که مشاهده می شود، وقتی مخروط افت تا مرزهای بالا و راست گسترش می یابد، جواب عددی از راه حل Jacob منحرف می شود. همچنین برای مقادیر کوچک t نیز روش عددی از تقریب ژاکوب منحرف می شود. علت این امر معتبر بودن روش ژاکوب برای u کمتر از ۰/۰۱ است. پس از ۱۳ روز، نتایج عددی به دلیل اثرات مرزی از تقریب Jacob منحرف می شود.

مقایسه نتایج بدست آمده از روش حل عددی با ضرایب مختلف α و حل تحلیلی (روش ژاکوب)

مطابق نتایج بدست آمده، روش کاملاً صریح ناپایدار است. در این روش $T\Delta t/Sa^2$ باید کمتر یا مساوی 0.5 باشد. به عبارت دیگر برای $\Delta t < 0.033$ شرایط پایدار است. در حالی که روش Crank-Nicolson ($\alpha = 0.5$) و روش کاملاً ضمنی (غیرصریح) ($\alpha = 1$) برای هر مقدار Δt پایدار می باشند. لازم به ذکر است روش کاملاً ضمنی به تعداد تکرارهای بیشتری نسبت به روش کرانک-نیکولسون نیاز دارد و با بزرگتر شدن مراحل زمانی برای هر دو روش، تعداد تکرارهای بیشتری مورد نیاز است.



حل عددی معادله جریان در آبخوان آزاد با استفاده از فرضیات DUPUIT

معادله حاکم بر جریان ناپایدار در آبخوان آزاد همگن و همسان به صورت زیر است:

$$\frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R(x, y, t)$$

ضریب ذخیره در آبخوان آزاد، آبدهی ویژه (specific yield) نامیده می شود. این ضریب، ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ برابر بیشتر از ضریب ذخیره آبخوان محصور است زیرا تغییرات در ذخیره آبخوان آزاد در نتیجه تغییرات ضخامت اشباع آن صورت می گیرد در حالی که در یک آبخوان محصور، آب به دلیل فشرده شدن آبخوان و تا حدی به دلیل انبساط آب از منافذ آزاد می شود. برای حل عددی معادله جریان در آبخوان باز، از تغییر متغیر $v = h^2$ استفاده می شود. لذا معادله فوق، به صورت زیر تبدیل می گردد:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial h^2}{\partial t} = 2h \frac{\partial h}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2h} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t}$$

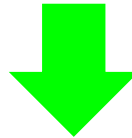
$$\frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} \right) = S \frac{\partial h}{\partial t} - R(x, y, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{S}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} - R(x, y, t)$$

حل عددی معادله جریان در آبخوان آزاد با استفاده از تقریب تفاضل محدود صریح

با ارائه تقریب تفاضل محدود بر حسب v می توان به صورت صریح اقدام به تعیین مقدار v و سپس h نمود. در این روش حل عددی،

لازم است نسبت $K \sqrt{v_{i,j}^n} / Sa^2$ به اندازه کافی کوچک نگه داشته شود تا راه حل پایدار باشد.

$$\frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{S}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} - R(x, y, t)$$



$$\frac{K}{2} \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) = \frac{S}{2\sqrt{v_{i,j}^n}} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} - R_{i,j}^n$$



$$\text{If } \Delta x = \Delta y = a \text{ and } \omega = \frac{4K \sqrt{v_{i,j}^n}}{Sa^2}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = (1 - \omega)v_{i,j}^n + \omega \left(\frac{v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n}{4} \right) + \frac{2R_{i,j}^n \sqrt{v_{i,j}^n} \Delta t}{S}$$

حل عددی معادله جریان در آبخوان آزاد با استفاده از تقریب تفاضل محدود ضمنی (غیر صریح)

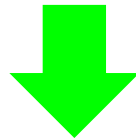
با استفاده از میانگین وزنی تقریب های v در گام های زمانی (n) و $(n + 1)$ و وزن دهی آن ها با استفاده از پارامتر α (بین 0 و 1)، می توان مشتقات جزئی معادله جریان در آبخوان آزاد را به صورت زیر ارائه نمود:

$$\frac{K}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \frac{S}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} - R(x, y, t)$$



$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1 - \alpha) \frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \alpha \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} + (1 - \alpha) \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}$$



$$\alpha (\tilde{v}_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}) + (1 - \alpha) (\tilde{v}_{i,j}^n - v_{i,j}^n) = \frac{Sa^2}{4K\sqrt{v_{i,j}^n}} \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) - \frac{a^2 R_{i,j}^n}{2K}$$

$$\Delta x = \Delta y = a$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = \frac{v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n}{4}$$

$$\alpha (\tilde{v}_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}) + (1 - \alpha) (\tilde{v}_{i,j}^n - v_{i,j}^n) = \frac{Sa^2}{4K\sqrt{v_{i,j}^n}} \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) - \frac{a^2 R_{i,j}^n}{2K}$$

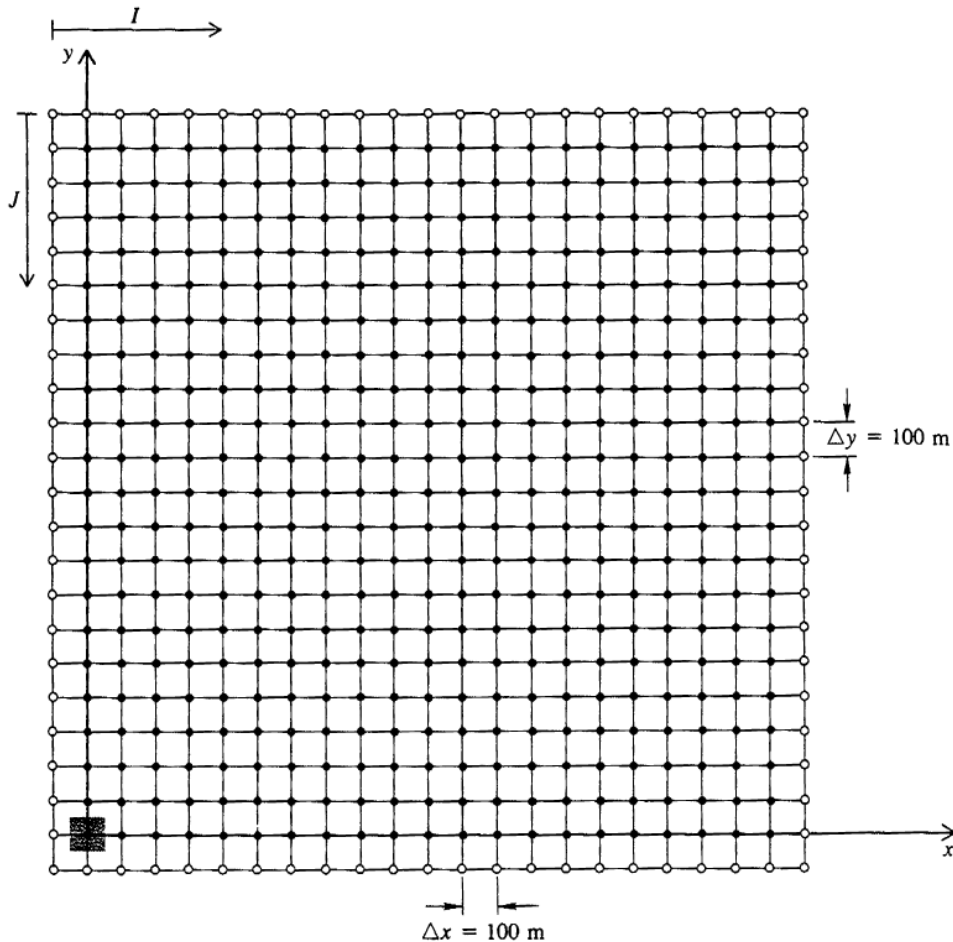
با مرتب نمودن رابطه فوق، می توان مقدار $v_{i,j}^{n+1}$ را با استفاده از تقریب ضمنی محاسبه نمود:

$$v_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\left[\left(Sa^2 / 4K\Delta t \sqrt{v_{i,j}^n} \right) + \alpha \right]} \left[\alpha \tilde{v}_{i,j}^{n+1} + \frac{Sa^2}{4K\Delta t \sqrt{v_{i,j}^n}} v_{i,j}^n + (1 - \alpha) (\tilde{v}_{i,j}^n - v_{i,j}^n) + \frac{a^2 R_{i,j}^n}{2K} \right]$$

معادله فوق سیستمی از معادلات خطی از $v_{i,j}$ در گام زمانی $(n + 1)$ را نشان می دهد. این سیستم را می توان مستقیماً با استفاده از روش های ماتریسی یا با روش های تکراری (مشابه آنچه که برای حل سیستم معادلات خطی برای معادلات لاپلاس یا پواسون استفاده گردید) حل نمود. در واقع برای مسائل جریان ناپایدار، باید یک سیستم جدید از معادلات در هر گام زمانی حل شوند. در این بخش، حل معادله فوق با استفاده از روش تکراری گوس-سایدل انجام می شود.

مثال) شبیه سازی تغییرات بار هیدرولیکی در اطراف یک چاه در حال پمپاژ حفاری شده در آبخوان آزاد

چاهی با دبی ثابت 2000 متر مکعب در روز از یک آبخوان آزاد در منطقه ای گسترده تخلیه می شود. بار پیزومتریک در ابتدا افقی و برابر با $h_0 = 10 \text{ m}$ است. با استفاده از تقریب تفاضل محدود ضمنی (غیرصریح) مقدار بار هیدرولیکی در سطح آبخوان و در محل چاه پمپاژی را در طی مدت زمان 88 روز استخراج نمایید. جهت حل تحلیلی، ضرایب آبخوان برابر با $T = 300 \text{ m}^2/\text{day}$ و $S = 0.002$ و محدوده آبخوان به شبکه هایی با ابعاد $\Delta x = \Delta y = 100 \text{ m}$ تقسیم گردد. مرزهای آبخوان به عنوان مرزهای بدون جریان در نظر گرفته شوند.



دبی تخلیه چاه برابر با است. ناحیه تحت نفوذ گره چاه، ناحیه سایه دار است. گره هایی که با دایره های باز نشان داده می شوند، گره های ساختگی هستند که برای شبیه سازی مرزهای بدون جریان استفاده می شوند. گره های توپر، نواحی فعال آبخوان را نشان می دهد.

سایر روش های حل عددی معادله جریان در آبخوان ها

راه حل هایی که تا کنون مورد بررسی قرار گرفتند برای حل مسائل نسبتاً ساده بوده و برای اکثر کاربردهای میدانی، مدلی با انعطاف پذیری بیشتر موردنیاز است. در شرایطی که آبخوان ناهمسان و ناهمگن باشد و یا به دلیل وضعیت هندسی آبخوان، نیاز به استفاده از شبکه های تفاضل محدود نامنظم (Δx و Δy غیرثابت) باشد، لازم است از مدل های پیچیده تر با استفاده از ترکیب روش های مستقیم (Direct method) و روش های مبتنی بر تکرار، جهت ارائه راه حل های کارآمدتر بهره جست.

در روش های تکراری، یک عبارت تفاضل محدود تعمیم یافته به طور مکرر برای هر گره از محدوده آبخوان حل می شود. اما در روش های مستقیم با استفاده از مجموعه ای از معادلات جبری خطی و حل یکباره آن ها، رفتار کمی و کیفی آبخوان تعیین می گردد.

الگوریتم توماس (Thomas algorithm)

مجموعه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید. این ماتریس مربع از ضرایب مجهولات x_1 ، x_2 و x_3 تشکیل شده است.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ -2x_1 + 7x_2 + x_3 &= 11 \\ 3x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 11 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

برای یافتن مجهولات این روابط کافی است معکوس ماتریس ضرایب سمت چپ در ماتریس ستونی سمت راست معادله فوق ضرب

شود.

مجموعه ای از n معادله خطی در n مجهول را می توان به شکل کلی زیر ارائه نمود:

$$A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,n}x_n = f_1$$

$$A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,n}x_n = f_2$$

\vdots

$$A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,n}x_n = f_n$$



$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ & & \vdots & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$



$$[A]\{x\} = \{f\}$$

هر ردیف از این معادلات را می توان به عنوان روابط

جریان حاکم بر یک گره از محدوده شبکه بندی

شده آبخوان در نظر گرفت. مجموعه ای از تمامی

معادلات، تشکیل دهنده روابط کل جریان حاکم بر

آبخوان های آزاد و بسته می باشند که با حل آن ها،

مقدار مجهول (تراز سطح آب زیرزمینی یا غلظت

متغیر کیفی) در هر گره بدست می آید.

معادله ماتریس فوق را می توان با نماد ساده تری به صورت زیر بازنویسی کرد:

به عنوان نمونه، معادله یک بعدی جریان ناپایدار آبخوان را مطابق رابطه زیر در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

با استفاده از تقریب تفاضل محدود غیرصریح یا برگشت به عقب، که در آن مشتق مکان در گام زمانی $(n + 1)$ ارزیابی می شود، خواهیم داشت:

$$\frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{S}{T} \left(\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \right)$$

در صورتی که بخواهیم برای یک محدوده آبخوان با شش گره، که اولین و آخرین گره به عنوان گره های مرزی می باشند، مجموعه ای از معادلات جبری گره ها را ارائه نمائیم، می توان این معادلات را برای گره ها به صورت ماتریسی ارائه نمود. برای این منظور با مرتب نمودن رابطه فوق و قرار دادن مجهولات (یعنی بارهای هیدرولیکی در گام زمانی $(n + 1)$) در سمت چپ و معلومات در سمت راست رابطه، خواهیم داشت:

$$h_{i-1}^{n+1} + \left(-2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} \right) h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1} = -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_i^n$$

اگر مقادیر سر h_1 و h_6 ، که از شرایط مرزی مشخص می شوند به سمت راست منتقل شوند، شکل ماتریسی مجموعه معادلات جبری برای این مسئله با شش گره بدست می آید.

$$\text{For } i = 2 \Rightarrow \left(-2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} \right) h_2^{n+1} + h_3^{n+1} = -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_2^n - h_1$$

$$\text{For } i = 3 \Rightarrow h_2^{n+1} + \left(-2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} \right) h_3^{n+1} + h_4^{n+1} = -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_3^n$$

$$\text{For } i = 5 \Rightarrow h_4^{n+1} + \left(-2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t}\right) h_5^{n+1} = -\frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} h_5^n - h_6$$

$$\begin{bmatrix} -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_2^{n+1} \\ h_3^{n+1} \\ h_4^{n+1} \\ h_5^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} h_2^n - h_1 \\ -\frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} h_3^n \\ -\frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} h_4^n \\ -\frac{S(\Delta x)^2}{T \Delta t} h_5^n - h_6 \end{Bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می شود، ماتریس ضرایب فقط در امتداد سه قطر مرکزی دارای ورودی های غیر صفر می باشد. این نوع ماتریس به ماتریس سه ضلعی (Tridiagonal matrix) معروف است. با استفاده از **الگوریتم توماس** می توان این ماتریس سه قطری را حل نمود.

لازم به ذکر است در صورتی که از روش حذفی گاوس (Gaussian elimination) جهت حل ماتریس فوق استفاده شود، نیاز به **حافظه بالا و زمان قابل توجه** است که در شبکه های گسترده تر آبخوان، بعضاً امکان بکارگیری آن وجود ندارد.

در این بخش به عنوان نمونه برای یک ماتریس سه قطری با معادلات خطی، الگوریتم توماس تشریح می شود.

$$\begin{aligned}
 b_1x_1 + c_1x_2 &= f_1 & \longrightarrow & x_1 + \beta_1x_2 = y_1 \\
 a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= f_2 & & y_1 = f_1/b_1 \quad \beta_1 = c_1/b_1 \\
 a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 &= f_3 \\
 a_4x_3 + b_4x_4 &= f_4
 \end{aligned}$$

در روابط فوق، a ، ضرایب زیر قطری (Subdiagonal coefficient)، b ، ضرایب مورب مرکزی (Central diagonal) coefficient) و c ، ضرایب فوق قطری (Superdiagonal coefficient) می باشند. در الگوریتم توماس با اعمال تغییراتی در روابط، ضرایب زیر قطری حذف شده و ضرایب مورب مرکزی به ۱ تغییر می یابد.

$$\begin{aligned}
 x_1 + \beta_1x_2 &= y_1 \Rightarrow x_1 = y_1 - \beta_1x_2 \\
 \downarrow \\
 a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= f_2 \longrightarrow (b_2 - a_2\beta_1)x_2 + c_2x_3 = f_2 - a_2y_1 \\
 \downarrow \\
 x_2 + \beta_2x_3 &= y_2 & \longleftarrow & x_2 + \frac{c_2}{\alpha_2}x_3 = \frac{f_2 - a_2y_1}{\alpha_2} \\
 & & & \beta_2 = c_2/\alpha_2 \\
 & & & y_2 = (f_2 - a_2y_1)/\alpha_2
 \end{aligned}$$

با تکرار عملیات تشریح شده برای معادلات دوم و سوم، به صورت زیر، ضرایب زیر قطری حذف شده و ضرایب مورب مرکزی به ۱ تغییر می یابد.

$$\begin{array}{rcl}
 b_1x_1 + c_1x_2 & = f_1 & x_1 + \beta_1x_2 = y_1 \\
 a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & = f_2 & x_2 + \beta_2x_3 = y_2 \\
 a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 & = f_3 & x_3 + \beta_3x_4 = y_3 \\
 a_4x_3 + b_4x_4 & = f_4 & x_4 = y_4
 \end{array}$$

$$\alpha_i = b_i - a_i\beta_{i-1} \\
 \beta_i = c_i/\alpha_i$$

$$y_i = (f_i - a_iy_{i-1})/\alpha_i$$



اگر β_0 و y_0 برابر با صفر تعریف شوند، می توان با مشخص بودن تمامی ضرایب و شروع از پایین ترین ردیف ($x_4 = y_4$)، تمامی مجهولات را بدست آورد. به طور کلی، مطابق این الگوریتم، $x_n = y_n$ (که در آن n تعداد معادلات است) و برای $i < n$ ، i ، تعداد

ردیف ها می باشد)، رابطه زیر برقرار است:

$$x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}$$

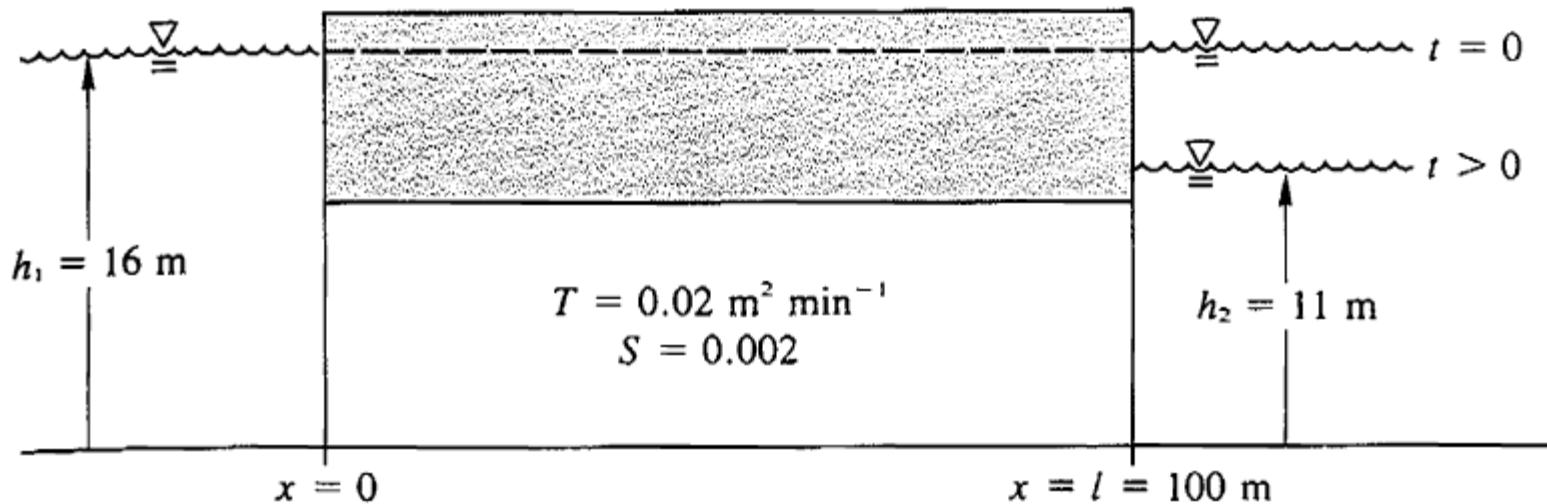
(مثال) واکنش آبخوان محصور به تغییر ناگهانی در تراز سطح آب در مخزن

آبخوانی محصور مطابق شکل زیر جهت تحلیل جریان در نتیجه تغییر ناگهانی تراز سطح آب مدنظر است. بار هیدرولیکی در سراسر آبخوان در ابتدا برابر با ۱۶ متر است. اگر در زمان $t = 0$ ، ناگهان تراز سطح آب در مخزن در $x = l$ از ۱۶ متر به ۱۱ متر کاهش یابد، تغییرات زمانی بار هیدرولیکی را با استفاده از الگوریتم توماس شبیه سازی نمایید. پارامترهای آبخوان در شکل مشخص شده است.

(حل) در صورتی که جریان در جهت y ناچیز در نظر گرفته شود، معادله یک بعدی حاکم بر این مسأله ناپایدار به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{شرایط مرزی} \quad \forall t > 0 \Rightarrow \begin{cases} h(0, t) = h_1 = 16 \text{ m} \\ h(l = 100 \text{ m}, t) = h_2 = 11 \text{ m} \end{cases} \quad \text{بود:}$$

$$\text{شرایط اولیه} \quad h(x, 0) = h_1, \quad 0 \leq x \leq l = 100 \text{ m}$$



با استفاده از تقریب تفاضل محدود غیرصریح یا برگشت به عقب، که در آن مشتق مکان در گام زمانی $(n + 1)$ ارزیابی می شود، خواهیم داشت:

$$\frac{h_{i-1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{S}{T} \left(\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \right)$$

$$h_{i-1}^{n+1} + \left(-2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} \right) h_i^{n+1} + h_{i+1}^{n+1} = -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_i^n$$

با استفاده از الگوریتم توماس و تعیین ضرایب زیر قطری، فوق قطری و مورب مرکزی، می توان مقدار بار هیدرولیکی را در هر گام زمانی تعیین نمود. از آنجا که در این الگوریتم نیازی به تعریف شرط پایداری جهت همگرا شدن جواب وجود ندارد، لذا این روش به ازای هر Δt پایدار است و منتج به جواب صحیح می شود.

$$\begin{bmatrix} -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 - \frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_2^{n+1} \\ h_3^{n+1} \\ h_4^{n+1} \\ h_5^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_2^n - h_1 \\ -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_3^n \\ -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_4^n \\ -\frac{S(\Delta x)^2}{T\Delta t} h_5^n - h_6 \end{Bmatrix}$$

روش Alternating Direction Implicit (ADI)

در شرایطی که معادله جریان دوبعدی ناپایدار باشد، ماتریس ضرایب سه قطری نبوده و امکان استفاده از الگوریتم توماس فراهم نمی باشد. چنانچه معادله جریان دوبعدی ناپایدار در یک آبخوان محصور را مدنظر قرار دهیم:

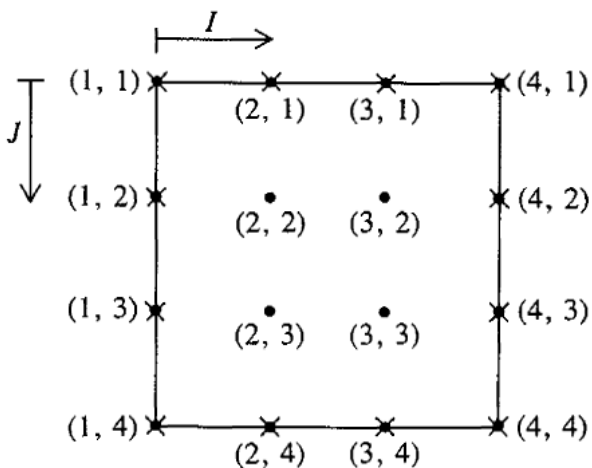
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

در صورتی که $\Delta x = \Delta y = a$ باشد، تقریب اختلاف محدود کاملاً غیرصریح به صورت زیر خواهد شد:

$$h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} - 4h_{i,j}^{n+1} = \frac{Sa^2}{T} \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t}$$

با قراردادن مجهولات در سمت چپ و معلومات در سمت راست، رابطه فوق به صورت زیر درخواهد آمد:

$$h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n$$



در صورتی که رابطه فوق برای یک سیستم با ۴ گره میانی و ۱۲ گره مرزی با بار هیدرولیکی مشخص در یک شبکه با ۱۶ گره ارائه شود، خواهیم داشت:

$$\text{For } i = 2, j = 2 \Rightarrow \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{2,2}^{n+1} + h_{3,2}^{n+1} + h_{2,3}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,2}^n - h_{1,2} - h_{2,1}$$

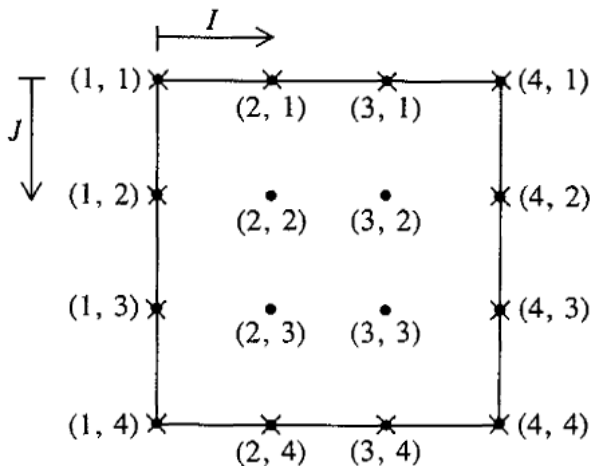
$$\text{For } i = 3, j = 2 \Rightarrow h_{2,2}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{3,2}^{n+1} + h_{3,3}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{3,2}^n - h_{3,1} - h_{4,2}$$

$$\text{For } i = 2, j = 3 \Rightarrow h_{2,2}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{2,3}^{n+1} + h_{3,3}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,3}^n - h_{1,3} - h_{2,4}$$

$$\text{For } i = 3, j = 3 \Rightarrow h_{2,2}^{n+1} + h_{3,2}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{3,3}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{3,3}^n - h_{4,3} - h_{3,4}$$

شکل ماتریسی مرتبط با ۴ گره میانی به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{2,2}^{n+1} \\ h_{3,2}^{n+1} \\ h_{2,3}^{n+1} \\ h_{3,3}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,2}^n - h_{1,2} - h_{2,1} \\ -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{3,2}^n - h_{3,1} - h_{4,2} \\ -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,3}^n - h_{1,3} - h_{2,4} \\ -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{3,3}^n - h_{4,3} - h_{3,4} \end{Bmatrix}$$



همانطور که مشاهده می شود، ماتریس فوق یک ماتریس سه قطری نیست. این یک

ماتریس متقارن قطری است و می تواند به طور مستقیم حل شود و نمی توان با

الگوریتم توماس آن را حل نمود.

اساس روش ADI، بدست آوردن یک ماتریس ضرایب سه قطری با نوشتن متناوب معادلات تفاضل محدود، ابتدا به طور ضمنی (implicitly) در امتداد ستون ها و به طور صریح (explicitly) در امتداد سطرها و سپس برعکس است. برای این منظور در اولین مرحله لازم است بارهای هیدرولیکی در امتداد ستون ها در گام زمانی $(n + 1)$ و در امتداد ردیف ها در گام زمانی (n) تقریب زده می شوند.

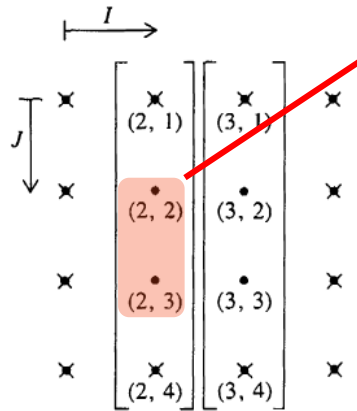
$$h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n$$



تقریب ضمنی بارهای هیدرولیکی در امتداد ستون ها

$$h_{i,j-1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n - h_{i+1,j}^n - h_{i-1,j}^n$$

بر این اساس مطابق رابطه فوق، یک ماتریس ضرایب سه قطری در امتداد هر ستون بدست می آید. به عبارت دیگر، تقریب صریح در امتداد سطرها منجر به جدا شدن یک ستون از ستون مجاورش می شود. لذا برای یک شبکه با ۴ گره میانی می توان ماتریس زیر را

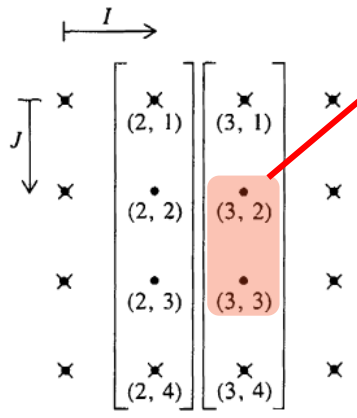


مجهولات

ماتریس ضرایب برای ستون دوم

ارائه نمود:

$$\begin{bmatrix} -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & & & \\ & 1 & & \\ & & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{2,2}^{n+1} \\ \\ h_{2,3}^{n+1} \\ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,2}^n - h_{3,2}^n - h_{1,2}^n - h_{2,1}^n \\ \\ -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,3}^n - h_{3,3}^n - h_{2,4}^n - h_{1,3}^n \end{Bmatrix}$$



مجهولات

ماتریس ضرایب برای ستون سوم

$$\begin{bmatrix} -4 - \frac{Sa^2}{T \Delta t} & 1 \\ 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T \Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{3,2}^{n+1} \\ h_{3,3}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Sa^2}{T \Delta t} h_{3,2}^n - h_{2,2}^n - h_{3,1} - h_{4,2} \\ -\frac{Sa^2}{T \Delta t} h_{3,3}^n - h_{2,3}^n - h_{4,3} - h_{3,4} \end{Bmatrix}$$

هر یک از این معادلات ماتریسی (مرتبط با ستون های دوم و سوم) را می توان به طور جداگانه با استفاده از الگوریتم توماس حل نمود. بر این اساس در صورتی که مسئله ای دارای ۳۵ ستون باشد و دو تای آن ها حاوی گره های مرزی مشخص، لازم است ۳۳ معادله ماتریسی قطری تولید و ۳۳ بار از الگوریتم توماس استفاده شود.

با تلفیق دو ماتریس ضرایب مشخص می شود که ماتریس ضرایب چهار در چهار حاصل شده به صورت سه قطری و لذا کل سیستم را می توان با استفاده از الگوریتم توماس حل نمود.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -4 - \frac{Sa^2}{T \Delta t} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T \Delta t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4 - \frac{Sa^2}{T \Delta t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T \Delta t} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} h_{2,2}^{n+1} \\ h_{2,3}^{n+1} \\ h_{3,2}^{n+1} \\ h_{3,3}^{n+1} \end{Bmatrix}$$

با حل این دستگاه معادلات، مقدار بارهای هیدرولیکی مجهول در گام زمانی $(n + 1)$ بدست می آید.

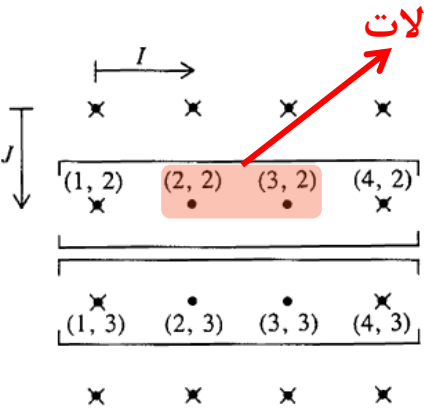
در مرحله دوم از روش ADI، ماتریس ضرایب سه قطری مرتبط با معادلات تفاضل محدود به طور ضمنی (implicitly) در امتداد سطرها و به طور صریح (explicitly) در امتداد ستونها نوشته می شود. برای این منظور لازم است بارهای هیدرولیکی در امتداد سطرها در گام زمانی $(n + 1)$ و در امتداد ستونها در گام زمانی (n) تقریب زده شوند.

$$h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n$$

تقریب ضمنی بارهای هیدرولیکی در امتداد سطرها



$$h_{i-1,j}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} + h_{i+1,j}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n - h_{i,j+1}^n - h_{i,j-1}^n$$

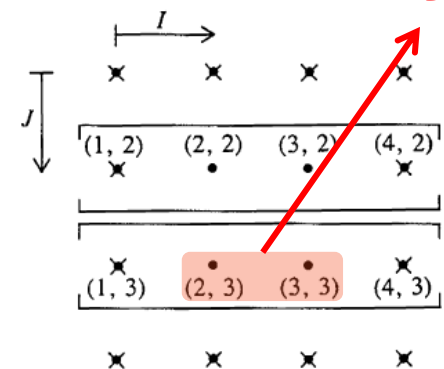


ماتریس ضرایب برای سطر دوم

$$\begin{bmatrix} -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & & & \\ & 1 & & \\ & & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{2,2}^{n+1} \\ h_{3,2}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,2}^n - h_{2,3}^n - h_{2,1}^n - h_{1,2}^n \\ -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{3,2}^n - h_{3,3}^n - h_{4,2}^n - h_{3,1}^n \end{Bmatrix}$$

مجهولات

ماتریس ضرایب برای سطر سوم



$$\begin{bmatrix} -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 1 & & \\ 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & & \\ & & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 1 \\ & & 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{2,3}^{n+1} \\ h_{3,3}^{n+1} \\ h_{2,2}^{n+1} \\ h_{3,2}^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{2,3}^n - h_{2,2}^n - h_{1,3} - h_{2,4} \\ -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{3,3}^n - h_{3,2}^n - h_{3,4} - h_{4,3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با تلفیق دو ماتریس ضرایب مشخص می شود که ماتریس ضرایب چهار در چهار حاصل شده به صورت سه قطری و لذا کل سیستم را می توان با استفاده از الگوریتم توماس حل نمود.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} h_{2,2}^{n+1} \\ h_{3,2}^{n+1} \\ h_{2,3}^{n+1} \\ h_{3,3}^{n+1} \end{Bmatrix}$$

جایگزین کردن تقریب صریح بین ستون ها و ردیف ها، می تواند خطاهای ایجاد شده در هر جهت را جبران نماید.

گاهی اوقات روش ADI منجر به ایجاد خطای قابل توجه در گره ها یا گام های زمانی خاص می شود. جهت کاهش این خطاها، از ترکیب روش ADI با روش های تکراری مانند روش گوس-سایدل می توان استفاده نمود. برای این منظور در هر گام زمانی، روش ADI به طور متناوب در امتداد ستون ها و سطرها اعمال می شود تا مقدار خطای مرتبط با بار هیدرولیکی محاسبه شده در دو تکرار متوالی از روش گوس-سایدل از آستانه خطای تعریف شده کمتر شود.

به طور کلی این روش را می توان به صورت زیر خلاصه نمود. در هر گام زمانی جهت شبیه سازی بار هیدرولیکی در هر گره، لازم است روش گوس-سایدل اعمال گردد. در روش گوس-سایدل، در هر تکرار دو مرحله محاسبه انجام می شود.

مرحله اول: مجموعه ای از معادلات خطی مرتبط با مشتقات جزئی حاکم بر معادله جریان برای هر ستون به صورت جداگانه ایجاد می شود. این معادلات با استفاده از الگوریتم توماس برای هر ستون حل می شوند. مقدار بار هیدرولیکی شبیه سازی شده در این مرحله به عنوان مقدار اولیه برای مرحله دوم مورد استفاده قرار می گیرند.

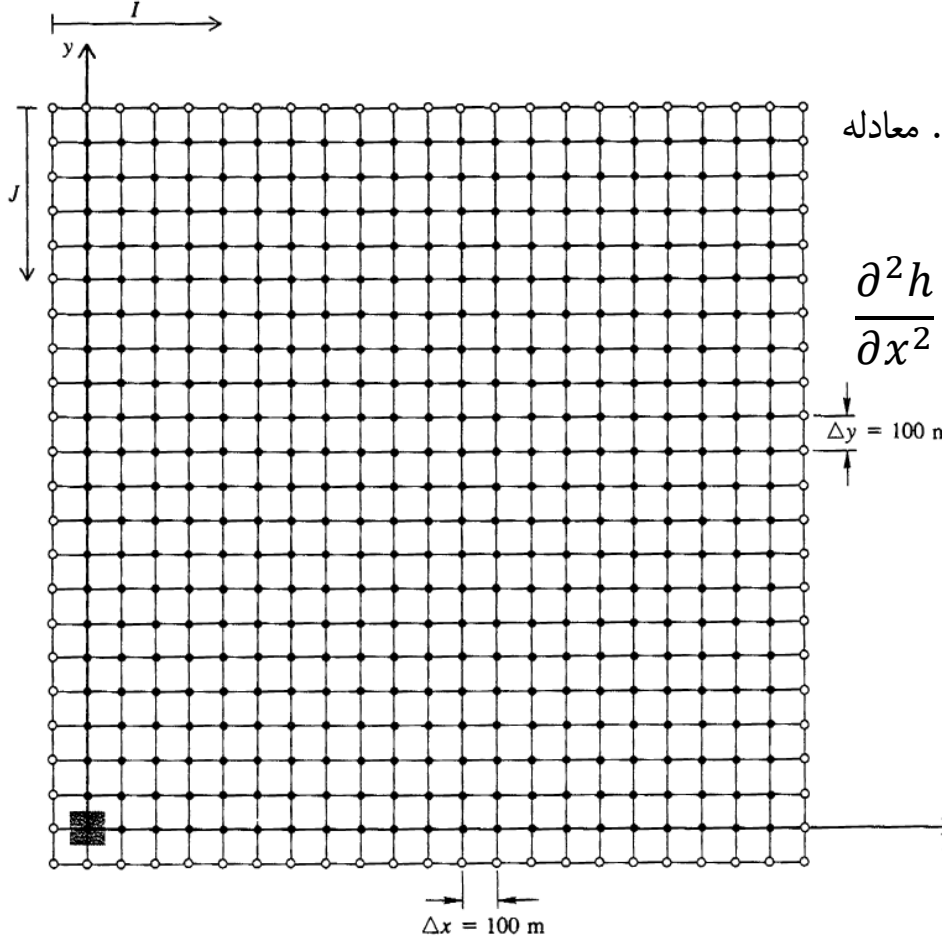
مرحله دوم: مجموعه ای از معادلات خطی برای هر ردیف از گره ها تولید و با استفاده از با استفاده از الگوریتم توماس حل می شوند. بار هیدرولیکی بدست آمده از مرحله دوم به مقدار بار هیدرولیکی اولیه مقایسه شده و در صورتی که اختلاف این دو بار هیدرولیکی در دو تکرار متوالی از مقدار آستانه خطای تعریف شده کمتر باشد، روش گوس-سایدل متوقف شده و بار هیدرولیکی نهایی بدست آمده به عنوان بار هیدرولیکی در آن گام زمانی ثبت می شود. این روند تا تکمیل کل زمان شبیه سازی ادامه می یابد.

در واقع در **روش Iterative ADI**، به جای حل یک مجموعه بزرگ از معادلات، مجموعه های کوچک معادلات خطی به دفعات حل می شوند.

مثال) شبیه سازی تغییرات بار هیدرولیکی در اطراف یک چاه در حال پمپاژ حفاری شده در آبخوان محصور با استفاده

Iterative ADI روش

چاهی با دبی ثابت ۲۰۰۰ متر مکعب در روز از یک آبخوان محصور با $T = 300 \text{ m}^2/\text{day}$ و $S = 0.002$ در منطقه ای گسترده تخلیه می شود. بار پیزومتریک در ابتدا افقی و برابر با $h_0 = 10 \text{ m}$ است. با استفاده از روش **Iterative ADI**، تراز سطح پیزومتریک در آبخوان و در موقعیت چاه را برای یک دوره ۸۸ روزه مورد محاسبه قرار دهید. جهت حل تحلیلی، محدوده آبخوان را به شبکه هایی با ابعاد $\Delta x = \Delta y = 100 \text{ m}$ تقسیم نمائید.



مرزهای آبخوان به عنوان مرزهای بدون جریان در نظر گرفته می شوند. معادله جریان حاکم بر این آبخوان به صورت رابطه زیر است:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{R(x, y, t)}{T}$$

در صورتی که $\Delta x = \Delta y = a$ باشد، تقریب اختلاف محدود کاملاً غیر صریح به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_{i+1,j}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1}}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_{i,j+1}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1}}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{R(x, y, t)}{T}$$

با قراردادن مجهولات در سمت چپ و معلومات در سمت راست، رابطه فوق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n - \frac{R_{i,j}^n a^2}{T}$$

در روش **Iterative ADI**، لازم است در هر تکرار از روش گاوس-سایدل، ماتریس ضرایب سه قطری به تناوب بر مبنای معادلات تفاضل محدود ضمنی در امتداد ستون ها و سطرها با استفاده از روش توماس حل شود. در صورتی که مقدار خطای شبیه سازی از خطای مشخص شده کمتر شد، بار هیدرولیکی در گام زمانی n نهایی می شود و به عنوان مقدار اولیه برای گام زمانی $(n + 1)$ مدنظر قرار می گیرد. بر این اساس، تقریب تفاضل محدود ضمنی در امتداد ستون ها و سطرها به صورت زیر خواهد بود:

$$h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n - \frac{R_{i,j}^n a^2}{T}$$

تقریب ضمنی بارهای هیدرولیکی در امتداد ستون ها در تکرار $m + 1$



$$h_{i,j-1,n+1}^{m+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j,n+1}^{m+1} + h_{i,j+1,n+1}^{m+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j,n}^m - h_{i+1,j,n+1}^m - h_{i-1,j,n+1}^m - \frac{R_{i,j} a^2}{T}$$

$$h_{i+1,j}^{n+1} + h_{i-1,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1} + h_{i,j-1}^{n+1} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j}^{n+1} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j}^n - \frac{R_{i,j}^n a^2}{T}$$

تقریب ضمنی بارهای هیدرولیکی در امتداد سطرها در تکرار $m + 2$



$$h_{i-1,j,n+1}^{m+2} + \left(-4 - \frac{Sa^2}{T\Delta t}\right) h_{i,j,n+1}^{m+2} + h_{i+1,j,n+1}^{m+2} = -\frac{Sa^2}{T\Delta t} h_{i,j,n} - h_{i,j+1,n+1}^{m+1} - h_{i,j-1,n+1}^{m+2} - \frac{R_{i,j} a^2}{T}$$